

Concursul Interjudețean de Matematică
„Memorialul David Hrimiuc”
ediția a VI- a, 6 – 8 noiembrie 2009

Clasa a III- a

- 1.**
- 4 p** a) Calculați: $55 + 8 - 60 =$
- 3 p** b) Ce număr se obține dacă din 2010 se scade de două ori numărul 45.
- 2.**
- 3 p** a) Calculați diferența dintre suma și diferența numerelor 105 și 103;
- 4 p** b) Într-o cutie sunt 30 de bile albe, galbene și roșii. Dacă 23 de bile nu sunt albe și bilele roșii sunt cu 3 mai multe decât cele albe, aflați câte bile albe, roșii și galbene sunt în cutie?
- 7 p** **3.** Ionuț a dorit să cumpere de la librărie trei caiete, un pix și două radiere. A aflat de la colegi că un caiet și o radieră costă 10 lei iar un pix și un caiet costă 15 lei. Calculați suma de care Ionuț are nevoie pentru a efectua cumpărăturile.

Clasa a IV- a

- 7 p** **1.** Calculați: $a = 10 - 10 : \{1 + 3 \times [(57 - 60 : 4 \times 2) : 3 + 21] : 10\}$
- 7 p** **2.** Suma a trei numere este 680. Dacă din fiecare din ele se scade același număr, se obțin numerele 90, 24, respectiv 191. Care sunt cele trei numere.
- 7 p** **3.** La Festivalul „Toamnă la Voroneț” 5 concurenți au rămas în finala concursului de caricatură. La sfârșitul concursului arbitrii au afirmat:
- a) Alexandru nu a ocupat locul I;
 - b) Gabriela a terminat concursul pe locul III;
 - c) Adrian a ocupat un loc mai bun decât Gabriela, dar nu a ocupat locul II;
 - d) Andreea nu a ieșit nici prima, nici ultima;
 - e) Silvia a terminat pe locul imediat următor locului ocupat de Alexandru.
- Ce loc a ocupat fiecare, știind că nu s-au clasat doi concurenți pe același loc? Justificați răspunsul!

Clasa a V- a

- 7 p 1. Calculați $a = \left[5^{10} \cdot (5 \cdot 2^4)^{24} \right] : (10^{10} \cdot 256^{10} \cdot 25^{12}) - 7 \cdot 3^2$
- 7 p 2. Suma a două numere naturale este 40, iar diferența lor este jumătate din numărul mai mic. Găsiți cele două numere.
- 7 p 3. Determinați numărul de două cifre care adunat cu suma cifrelor sale dă numărul 69.

Clasa a VI- a

- 7 p 1. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$. Dacă 7 divide numerele $3a + 2b$ și $5a + 4b$ atunci a și b sunt multiplu de 7.
- 7 p 2. Comparați numerele: $a = 2^{111} \cdot 5^{38}$ și $b = 3^{131}$.
- 7 p 3. Pe dreapta d se consideră punctele A, B și C mijlocul segmentului $[AB]$. Precizați poziția punctului $M \in d$ față de punctele A, B, C dacă $2MC = MB - MA$.

Clasa a VII- a

- 7 p 1. Determinați numerele naturale nenule a, b, c pentru care $\frac{a+1}{b} = \frac{b+1}{c} = \frac{c+1}{a} \in \mathbb{N}$
2. Fie $ABCD$ un paralelogram pentru care bisectoarele unghiurilor DAB și ABC se intersectează într-un punct de pe latura $[DC]$.
- 3 p a) Determinați raportul $\frac{AB}{BC}$;
- 2 p b) Determinați laturile paralelogramului dacă perimetrul său este egal cu 72;
- 2 p c) Arătați că bisectoarele unghiurilor ADC și DCB se intersectează pe latura AB .
- 7 p 3. Rezolvați în numere întregi ecuația: $3x^2 + 8y^2 = 20$.
- 4.
- 3 p a) Arătați că $x + \frac{1}{x} \geq 2$, pentru orice $x > 0$ și $x + \frac{1}{x} \leq -2$ pentru orice $x < 0$;
- 4 p b) Demonstrați că: $\left(a \frac{x}{y} + b \right)^2 + \left(a \frac{y}{x} + b \right)^2 \geq 2(a+b)^2$, pentru orice $a, b, x, y > 0$.

Clasa a VIII- a

- 7 p 1. Se consideră patrulaterul $ABCD$ în care laturile AB și CD nu sunt paralele. Dacă numai latura CD se găsește în planul α și E este intersecția dreptei AB cu planul α , precizați dacă D , C , E pot fi vârfurile unui triunghi.
- 2.
- 2 p a) Arătați că dacă în triunghiul ABC $m(\hat{A}) \leq 90^\circ$ atunci $BC^2 \leq AB^2 + AC^2$
- 5 p b) Fie triunghiul ABC și O un punct nesituat în planul triunghiului astfel încât $(AB + BC + CA)^2 \geq 6(OA^2 + OB^2 + OC^2)$. Arătați că dacă nici unul din unghiurile AOB , BOC , COA nu este obtuz, atunci triunghiul ABC este echilateral și unghiurile AOB , BOC , COA sunt drepte.
- 7 p 3. Precizați dacă numărul $a = \sqrt{496 + \sqrt{991}} - \sqrt{496 - \sqrt{991}}$ este rațional.
- 7 p 4. Rezolvați în \square ecuația: $x^2 - 2x - 2\sqrt{(x-1)^2} - 2 = 0$

Concursul Interjudețean de Matematică „Memorialul David Hrimiuc” ediția a VII- a, 29 – 31 octombrie 2010

Clasa a III- a

- 1.
- 4,5 p a) Scrieți toate numerele de 3 cifre ce se pot forma cu cifrele 1, 2, 5 care să nu conțină cifre egale;
- 2,5 p b) Determinați suma tuturor numerelor găsite la punctul a).
2. Se consideră suma:
- $$S = 3 + 5 + 7 + 13 + 15 + 17 + 22 + 24 + 25 + 35 + 36 + 38$$
- 4 p a) Calculați suma grupând convenabil termenii;
- 3 p b) Dacă înlocuim un singur semn „+” cu semnul „-” se obține rezultatul 190. În fața cărui număr din sumă s-a pus semnul „-”?
- 7 p 3. Patru copii au același număr de bomboane. După ce fiecare mănâncă câte 12 bomboane, le rămân, în total, tot atâtea bomboane câte avea fiecare la început. Câte bomboane avea fiecare la început?

Clasa a IV- a

7 p 1. Calculează câtul și produsul numerelor a și b știind că:

$$a = (103 - 39) : 8 - 36 : 9$$

$$b = 9 \cdot 8 \cdot 0 \cdot 5 + 0 : 9 + 40 : 20$$

2.

4 p a) Punând între cifrele 2 și 3 semnele +, -, x, :, să se obțină egalitățile:

$$2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad = 0$$

$$3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad = 7$$

$$2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad = 5$$

$$3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad = 9$$

3 p b) Aflați numărul care însumat cu el însuși, apoi cu jumătatea lui, cu sfertul lui și încă 1, ajunge la 100.

7 p 3. Ursul spune vulpei:

- Buna masa, cumătră! Tiii, da' ce mult pește ai!

Dă-mi și mie că tare mi-i poftă!

Vulpea îi răspunse:

- Dacă ți-aș da 2 pești și aș mânca eu a treia parte din rest, aș rămâne cu 40.

Ghicește câți pești am, dacă poștești!

Clasa a V- a

1. Fie numărul $n = 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{99}$.

4 p a) Arătați că numărul n are ultima cifră 0;

3 p b) Arătați că numărul n se divide cu 8.

7 p 2. Fie numerele naturale a, b, c pentru care $a + b = 71$ și $b + c = 97$.
Calculați $4a + 7b + 3c$.

7 p 3. Arătați că numărul $n = 3019 \cdot 1009 - 1009^2 + 2010 \cdot 1001$ este pătrat perfect.

Clasa a VI- a

7 p 1. Numărul n de 3 cifre împărțit la 15, la 24 și la 48 dă același rest.

a) Determinați câte numere n cu proprietatea enunțată există;

b) Precizați cel mai mic număr și cel mai mare număr cu proprietatea dată.

7 p 2. Două unghiuri se numesc complementare dacă suma măsurilor lor este egală cu 90° și suplementare dacă suma măsurilor lor este egală cu 180° .

Fie unghiul AOB . Calculați măsura suplementului acestui unghi știind că suplementul COD al complementului BOC al unghiului AOB are măsura egală cu 132° .

7 p 3. Comparați numerele: $a = 3^{2n+7}$ și $b = 2^{3n+11}$, $n \in \mathbb{N}$.

Clasa a VII- a

7 p 1. Fie numerele $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{-1, 1\}$ astfel încât $a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_na_1 = 0$.

a) Câți termeni conține suma din stânga egalității?;

b) Arătați că n este par;

c) Arătați că n este multiplu de 4.

7 p 2. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $(AB) \equiv (AC)$. Fie $D \in (AB)$ și $E \in (AC)$ astfel încât $(AE) \equiv (BD)$.

Fie F mijlocul segmentului (DE) și L intersecția dreptei AF cu latura $[BC]$.

Arătați că $AELD$ e paralelogram.

7 p 3. Fie a, b, c numere raționale nenule. Dacă

$x = bc + \frac{1}{a}$, $y = ac + \frac{1}{b}$, $z = ab + \frac{1}{c}$ și $ax + by + cz = 1$, arătați că $xyz < 0$.

7 p 4. Dacă $a = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{2009}{2010}$ și $b = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1005} \right)$, calculați

$a + b$.

Clasa a VIII- a

1. Fie numerele reale: $x = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{23} + \sqrt{24}}$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{24} + \sqrt{25}}$$

3 p a) Calculați $x + y$;

4 p b) Arătați că $y < 2 < x$.

7 p 2. Determinați $x, y \in \mathbb{R}$ dacă $x^2 + y^2 + x + y = 2^{|x-y|} + 3$.

7 p 3. Determinați valorile lui n naturale pentru care $\sqrt{n^2 + 6n + 26} \in \mathbb{N}$.

7 p 4. Fie punctele necoplanare A, B, C, D cu $(AB) \equiv (AC)$. Fie $E \in (AB)$ și $F \in (AC)$ astfel încât $(AE) \equiv (CF)$.

a) Arătați că dacă $EL \parallel AC$, $L \in (BC)$ atunci (EF) și (AL) au același mijloc;

b) Arătați că dreapta determinată de mijloacele segmentelor (AD) și (EF) este paralelă cu planul (BCD) ;

Concursul Interjudețean de Matematică
„Memorialul David Hrimiuc”
ediția a VIII - a, 11 – 13 noiembrie 2011

Clasa a III- a

1. Completați cu semnele „+” și „-”, pătrățelele goale astfel încât să obțineți egalitate:
- 3 p** a) $13 \square 4 \square 8 = 17$
- 4 p** b) $15 \square 13 \square 11 \square 25 \square 7 = 31$
- 7 p** 2. O gospodină a aranjat în cămară borcanele cu gem astfel: pe un raft a pus 6 rânduri cu câte 6 borcane cu gem de căpșuni, 3 rânduri cu câte 6 borcane cu gem de gutui și 4 rânduri cu câte 6 borcane cu gem de struguri. Câte borcane sunt pe al doilea raft, dacă în total sunt 106 borcane cu gem?
3. Într-o familie sunt trei frați. Andrei este mai mare decât Dănuț, dar mai mic decât Robert. Fiecare din frați este cu același număr de ani mai mic decât următorul (se consideră ani împliniți, exprimați prin numere naturale diferite de zero), iar fratele mijlociu are 10 ani.
- 3 p** a) Scrieți numele celor trei frați în ordinea descrescătoare a vârstei lor.
- 2 p** b) Care este suma vârstelor celor trei frați?
- 2 p** c) Care este vârsta maximă pe care ar putea să o aibă cel mai mare dintre frați? Justificați răspunsul.

Clasa a IV-a

- 3p** 1. a) Folosiți paranteze și plasați în fiecare pătrățel câte un semn de operație pentru a obține egalitatea :

$$9 \square 8 \square 7 \square 6 \square 5 \square 4 \square 3 \square 2 \square 1 = 12$$

- (4p)** b) Bunica are un coș cu mai puțin de 20 de prune. Dacă împarte prunele în mod egal la 2 copii, sau la 3 copii, sau la 4 copii, îi rămâne de fiecare dată o prună în coș. Câte prune sunt în coș ?

Gazeta Matematică –seria B nr 10/2011

- (7p)** 2. Elevii claselor a IV-a A și a IV-a B, în total, 44 de copii merg

într-o drumeție. Dacă trei elevi din clasa a IV-a A ar mai aduce fiecare câte 4 prieteni iar 4 elevi din IV B ar mai aduce fiecare câte 2 prieteni, în cele două grupuri ar fi același număr de copii. Câți copii sunt în fiecare din cele două grupuri

- (4p) 3. Ionel are în două cutii mari de carton câte 3 cutii mijlocii, iar în fiecare dintre acestea câte 5 cutii mici.
- a) Câte cutii are Ionel?
- (3p) b) Ionel, găsește în cutii și 20 de pixuri în total, de culori diferite, galbene, verzi sau albaste. Știind că 12 nu erau galbene 14 nu erau verzi, află câte pixuri din fiecare culoare erau.

Clasa a V- a

1. (4p) a) Calculați $1^2 + 5^2 + 10^2 + 27^2 + 34^2$.

(3p) b) Arătați că numărul 2011^{2011} poate fi scris ca o sumă de cinci pătrate perfecte nenule.

(7p) 2. Aflați numărul \overline{abc} știind că $\overline{abc1} = 4 \cdot \overline{1abc} + 1371$.

(7p) 3. Suma a patru numere naturale este 2046. Împărțind primul număr la al doilea obținem câtul 2 și restul 1, împărțind al doilea număr la al treilea obținem câtul 3 și restul 2, iar împărțind al treilea număr la al patrulea obținem câtul 4 și restul 3. Aflați cele patru numere.

Clasa a VI- a

1. Arătați că numărul:

(3p) a) $\overline{abcd} - \overline{cd}$ este multiplu de 25;

(4p) b) $S = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{50}$ este multiplu de 30.

(7p) 2. Determinați numerele naturale a , b și \overline{xyz} știind că $2^{3a} - 2^{3b} = \overline{xyz}$ și \overline{xyz} este număr impar.

3. Fie punctele coliniare, în această ordine, A_1, A_2, \dots, A_n , $n \geq 3$, astfel încât A_i este mijlocul lui $[A_{i-1}A_{i+1}]$, $i \in \{2; 3; \dots; n-1\}$.

(2p) a) Determinați A_1A_2 și A_1A_n știind că $A_8A_9 = 2$ cm.

(2p) b) Determinați n știind că $A_5A_6 = 3$ cm și $A_1A_n = 36$ cm.

(2p) c) Dacă $n = 15$, care dintre punctele $A_2; A_3; \dots; A_{14}$ este mijlocul segmentului $[A_1A_{15}]$?

(1p) d) Dacă $A_1A_2 = 1$ cm, calculați suma:

$$S = A_1A_2 + A_1A_3 + A_1A_4 + \dots + A_1A_n.$$

(7p) 4. De aceeași parte a dreptei AB se construiesc semidreptele $(OC$ și $(OD$ astfel încât $O \in (AB)$, $(OD \subset \text{Int}(\sphericalangle COB))$, iar $m(\sphericalangle COD) = 80^\circ$. Aflați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOC și BOD .

Clasa a VII- a

(7p) 1. Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât numerele $a = \frac{2x+1}{3x+1}$ și

$b = \frac{x-2}{4x+1}$ să fie simultan întregi.

(7p) 2. Numerele raționale nenule x, y, z sunt direct proporționale cu $x+1, y+2, z+3$. Dacă $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 54$, calculați $x+y+z$.

3. Pe latura BC a triunghiului isoscel ABC ($AB = AC$) se consideră punctele M și N astfel încât $B \in (MC)$, $C \in (BN)$ și $BM = CN = AB$. Bisectoarele unghiurilor ABM și ACN se intersectează în punctul I . Arătați că:

(4p) a) $IM = IA = IN$;

(3p) b) punctele A, I și mijlocul lui $[BC]$ sunt coliniare.

(7p) 4. În triunghiul ABC , $[AD]$ și $[BE]$ sunt înălțimi, $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, iar $AD \cap BE = \{H\}$. Punctele M, N, P, Q sunt mijloacele segmentelor $[AH]$, $[BH]$, $[BC]$, respectiv $[AC]$. Arătați că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi.

Clasa a VIII- a

(7p) 1. Dacă $x \in [-1;1]$ și $y \in [-2;3]$ arătați că expresia:

$$E = \sqrt{(x+y-4)^2} + \sqrt{(x+y+5)^2} - \sqrt{(x-y-3)^2} - \sqrt{(x-y+4)^2}$$

este constantă.

(7p) 2. Comparați numerele:

$$A = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - 2 \quad \text{și} \quad B = \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} - 2.$$

3. (3p) a) Arătați că $\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}$, oricare ar fi $x, y > 0$.

(4p) b) Paralelogramul $ABCD$ și trapezul $CDEF$ ($CD \parallel EF$) sunt situate în plane diferite și $EF = AD$. Știind că $MN \parallel EF$, unde $\{N\} = AF \cap BE$ și $M \in (AE)$, arătați că $2MN < \sqrt{AB \cdot BC}$.

(7p) 4. Se consideră punctele necoplanare A, B, C, D . Bisectoarea unghiului BAC intersectează $[BC]$ în punctul M , iar bisectoarea unghiului BAD intersectează $[BD]$ în punctul P . Demonstrați că $MP \parallel DC$ dacă și numai dacă $AC = AD$.

Matematica în Bucovina. Concursul Internațional
„Memorialul David Hrimiuc”
ediția a IX- a, 26 – 28 octombrie 2012

Clasa a III- a

7 p 1. În prezent, tatăl și fiul au împreună 31 de ani. Peste 2 ani, vârsta fiului va fi de șase ori mai mică decât vârsta tatălui din acel moment. Ce vârstă are fiecare dintre ei în prezent?

G.M. 6 – 7 – 8/2012

2. Ionel are 5 baloane galbene și 6 baloane roșii. Jucându-se 7 dintre ele s-au spart.

2 p a) Câte baloane i-au mai rămas?

5 p b) Câte baloane i-au mai rămas din fiecare culoare? Găsiți toate posibilitățile.

7 p 3. Știind că $a - 234 = 456 - b = 333$, aflați $a + b$ și $a - b$.

Clasa a IV- a

7 p 1. Un elev și-a notat caietul începând cu numărul 1. La sfârșit a observat că în numerotare a folosit de 18 ori cifra 5. Precizați numărul minim și numărul maxim de pagini ale caietului.

G.M. 6 – 7 – 8/2012

7 p 2. Determinați trei numere naturale consecutive știind că suma dintre primul număr, dublul celui de-al doilea și triplul celui de-al treilea este egală cu 2012.

7 p 3. Un album costă cât două cărți, iar două cărți costă cât 3 penare. Dacă două penare, două cărți și un album costă 128 lei, aflați costul unui album, al unei cărți și al unui penar.

Clasa a V- a

7 p 1. Să se afle numerele a și b știind că suma lor este 120, iar dacă împărțim triplul lui a la dublul lui b obținem câtul 2 și restul 10.

G.M. 4/2012

7 p 2. În câte zerouri se termină numărul $a = 4^{22} \cdot 6^4 \cdot 15^{23} \cdot 25^6 \cdot 35^7$?

7 p 3. Determinați numerele \overline{abc} astfel încât $\overline{2bc} + \overline{a3c} + \overline{ab4} = 2012$.

Clasa a VI- a

7 p 1. Fie $A = \{(x, y) \mid 7x + 3y = 2010, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$. Câte elemente are mulțimea A ?

7 p 2. Fie A, B, C trei puncte coliniare în această ordine, iar punctul M este mijlocul segmentului $[AC]$. Arătați că dacă lungimile segmentelor $[AB]$ și $[BC]$ sunt numere prime consecutive mai mare decât 2, atunci lungimea segmentului $[AM]$ este număr natural compus.

7 p 3. Dacă $x, y \in \mathbb{N}^*$ și $x + y \mid 3x + 5y$ atunci $x + y \mid 5x + 3y$.

7 p 4. Comparați numerele: $a = 3^{303}$ și $b = 2^{454}$.

Clasa a VII- a

7 p 1. Determinați numerele întregi x, y, z astfel încât: $\frac{2x+3}{3} = \frac{2}{3y-1} = \frac{5}{4z-3}$.
G.M. 3/2012

2. Fie triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), M mijlocul laturii $[BC]$, $O \in [AM]$, E simetricul lui O față de AB și F simetricul lui O față de AC .

4 p a) Arătați că triunghiul MEF este isoscel;

3 p b) Arătați că $AM \perp EF$.

7 p 3. Determinați valorile întregi ale lui n pentru care fracțiile $\frac{n-5}{3n+1}$ și $\frac{5n+3}{3n+5}$ sunt simultan numere întregi.

4.

3 p a) Arătați că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \forall a, b > 0$;

4 p b) Arătați că $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c, \forall a, b, c > 0$

Clasa a VIII- a

7 p 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor raționale ecuația:
 $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2x - 6y - 2z + 6 = 0$.

7 p 2. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare, M mijlocul segmentului (BC) și $N \in (AC)$, cu $AC = 3AN$. Un plan α ce conține dreapta AD intersectează segmentul (BM) în P . Arătați că $MN \parallel \alpha$ dacă și numai dacă P este mijlocul segmentului (BM) .

3.

4 p a) Arătați că $n(n^2 + 1)(3n^2 + 2)$ este divizibil cu 5 oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$;

3 p b) Determinați ultima cifră a numărului $a = n(n^2 + 1)(3n^2 + 2) + 2, n \in \mathbb{Z}$.

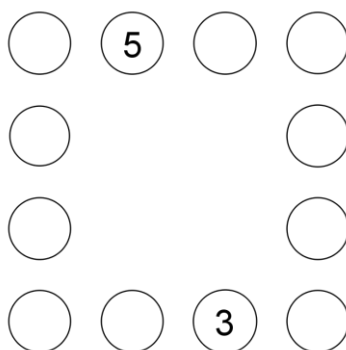
7 p 4. Determinați numerele raționale x, y astfel încât
 $x - 3 + y\sqrt{2} = y + (2x - 1)\sqrt{2}$

G.M. 3/2012

**Matematica în Bucovina. Concursul Internațional
„Memorialul David Hrimiuc”
ediția a X- a, 1 – 3 noiembrie 2013**

Clasa a III- a

- 7 p** 1. George scrie pe tablă mai multe numere naturale consecutive, în ordine crescătoare. Câte numere a scris George, dacă primul număr scris este 246, iar ultimul număr scris este 642?
- 7 p** 2. Un bărbat este întrebat câți ani are. El răspunde: ”Eu și soția mea avem împreună 100 de ani. Peste 15 ani, ea va avea 48 de ani.” Câți ani are soțul în prezent? Justificați răspunsul.
- 7 p** 3. Folosind numerele de la 1 la 12 o singură dată fiecare, completați cerculețele din figura de mai jos astfel încât suma numerelor de pe fiecare latură a pătratului să fie 30.



Clasa a IV- a

- 7 p** 1. Câte numere de două cifre înmulțite cu 7 dau un număr de trei cifre? Justificați răspunsul.
- 7 p** 2. Alin spune: ”Luni și marți am rezolvat un număr de probleme,

miercuri și joi am de rezolvat de două ori mai multe probleme decât luni și marți, iar vineri am de rezolvat cât în celelalte patru zile la un loc. Așa am reușit să rezolv 50 de probleme.” Este adevărat ceea ce spune Alin? Justificați răspunsul dat.

- 7 p** **3.** La o expoziție sunt de cinci ori mai multe tablouri cu peisaje decât tablouri cu flori. Dacă se vând 25 de tablouri cu peisaje și 3 tablouri cu flori, atunci numărul tablourilor cu peisaje este de trei ori mai mare decât al tablourilor cu flori. Aflați câte tablouri de fiecare fel sunt în expoziție.

Clasa a V- a

- 7 p** **1.** Un elev trebuie să rezolve 24 de probleme în patru zile. În fiecare zi rezolvă mai multe probleme decât în ziua precedentă. În ziua a patra rezolvă de cinci ori mai multe probleme decât în prima zi. Care este numărul maxim de probleme pe care le poate rezolva în a treia zi? Justificați răspunsul dat.

2. Se dau numerele:

$$a = \underset{\text{de 2013 ori}}{11\dots 1} + \underset{\text{de 2013 ori}}{22\dots 2} + \underset{\text{de 2013 ori}}{33\dots 3} + \dots + \underset{\text{de 2013 ori}}{99\dots 9}$$
$$b = 3 + 33 + 333 + \dots + \underset{\text{de 2013 ori}}{33\dots 3}$$

- 3 p** a) Calculați $3 \cdot b + 2013$.
- 4 p** b) Determinați suma cifrelor numărului $c = a - 4 \cdot (3 \cdot b + 2013)$.

- 1 p** **3. a)** Care poate fi ultima cifră a produsului $5 \cdot a$, unde a este număr natural?

- 6 p** b) Determinați numerele naturale de forma \overline{abc} pentru care $\overline{abc} = 2 \cdot c^3 + c$.

Clasa a VI- a

- 7 p** 1. Arătați că oricare ar fi cifrele a și b , numărul $\overline{ab15}$ are un număr par de divizori naturali.
- 7 p** 2. Se dau patru puncte astfel încât $B \in (AC)$, $C \in (BD)$ și
$$AB + 2BC + 3CD = 2AD.$$
Să se determine punctul $M \in (BC)$ cu proprietatea că:
$$AM \cdot MC = BM \cdot MD.$$
- 7 p** 3. Vom numi *interesante* numerele care, scrise în sistemul zecimal, sunt formate din patru cifre distincte astfel încât una dintre ele este suma celorlalte trei. Arătați că diferența dintre cel mai mare număr interesant și cel mai mic număr interesant este produsul a trei numere prime distincte.
- 7 p** 4. Determinați câte perechi distincte (c, l) există cu proprietatea că:
 c, l și $c \cdot l$ sunt divizori ai lui 216.

Clasa a VII- a

- 7 p** 1. Determinați numerele $\overline{0,(abc)}$ știind că zecimala de pe locul 2013 este 5, cea de pe locul 2014 este 2, iar cea de pe locul 2015 este 1.
- 7 p** 2. Se consideră punctul M în interiorul triunghiului isoscel ABC cu vârful A și $m(\sphericalangle A) = 45^\circ$. Fie $\{D\} = CM \cap AB$ și $E \in AC$ astfel încât $[DE]$ este bisectoarea unghiului ADC . Să se arate că dacă $BM \perp DE$ și $AD + DM = AE + ED$, atunci M este ortocentrul triunghiului ABC .

7 p 3. Fie $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $m \leq n \leq p$ și $m \cdot n \cdot p = 72$. Câte triplete distincte $\left(\frac{a}{m}, \frac{b}{n}, \frac{c}{p}\right)$ se pot forma, cu proprietatea că cele trei fracții sunt ireductibile, subunitare, distincte și nenule?

7 p 4. Fie ABC un triunghi dreptunghic, M mijlocul ipotenuzei $[BC]$ și P un punct oarecare pe dreapta AB diferit de mijlocul segmentului AB . Paralela prin P la AC intersectează AM în X și BC în D . Paralela prin D la AB intersectează AM în Y . Demonstrați că $BXCY$ este paralelogram.

Clasa a VIII- a

7 p 1. Fie a, b, c numere naturale. Dacă singurul număr natural din intervalul $(a; c)$ este b , arătați că $\sqrt{b^2 - ac}$ este număr rațional.

3 p 2. a) Să se arate că pentru orice numere $a, b \geq 0$ are loc inegalitatea:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

4 p b) Să se arate că pentru orice număr natural nenul avem:

$$\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{13}{2}} + \sqrt{\frac{25}{2}} + \dots + \sqrt{\frac{2n^2+2n+1}{2}} > \frac{n(n+2)}{2}$$

3. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare și $M \in (AB)$. Prin M se construiește un plan α astfel încât $AD \perp \alpha$ și $\alpha \perp BC$, iar α intersectează dreptele BD , DC și CA respectiv în punctele N , P și R .

4 p a) Arătați că $MNPR$ paralelogram;

3 p b) Dacă $AB=8$, $AD=10$, $BC=15$, determinați poziția punctului $M \in (AB)$ astfel încât perimetrul lui $MNPR$ să fie 25.

4. Pe segmentul $[BC]$ de lungime 2013 se consideră punctul M astfel

Încât lungimile segmentelor BM și CM sunt numere raționale. Prin M se duc două drepte d și d' perpendiculare pe BC și perpendiculare între ele. Fie punctul $A \in d$ și $A' \in d'$ astfel încât triunghiurile ABC și $A'BC$ sunt dreptunghice în A și respectiv A' .

3 p

a) Arătați că $\triangle ABC \equiv \triangle A'BC$;

4 p

b) Câte posibilități de alegere a punctului M există astfel încât aria triunghiului AMA' să fie număr natural?

**Matematica în Bucovina. Concursul Internațional
„Memorialul David Hrimiuc”
ediția a XI- a, 7- 9 noiembrie 2014**

Clasa a III- a

7 p

1. În careul de mai jos, se știe că suma numerelor de pe fiecare linie sau coloană sau diagonală este aceeași. Aflați numerele naturale a , b , c , d și e . Justificați răspunsul.

670	a	501
b	671	c
d	e	672

7 p

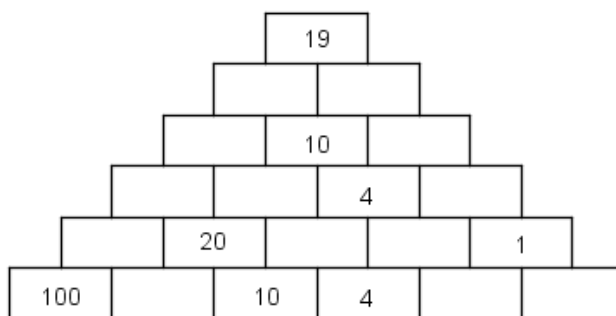
2. Putem introduce în 5 cutii 28 de obiecte, astfel încât să nu existe cutii goale, să nu avem în două cutii același număr de obiecte și în fiecare cutie să avem un număr par de obiecte? Justificați răspunsul.

7 p

3. Într-o cutie sunt bile roșii, galbene, negre și verzi, în total 20 de bile. Dacă 14 bile nu sunt negre, 2 bile sunt verzi și 15 bile nu sunt galbene, aflați câte bile roșii sunt în cutie. Justificați răspunsul.

Clasa a IV- a

- 7 p** 1. Completați spațiile goale din piramida de mai jos cu numere potrivite, știind că în fiecare căsuță se află un număr care este diferența celor două numere care se află sub el.



- 7 p** 2. Într-o bibliotecă, pe fiecare raft sunt câte 30 de cărți. Dacă pe fiecare raft s-ar pune câte 35 de cărți, ar rămâne 3 rafturi goale. Câte rafturi are biblioteca? Justificați răspunsul dat.

- 7 p** 3. În vacanța de vară, Andrei a citit o carte. Când a deschis cartea, el a observat că i s-au desprins câteva pagini de la mijlocul acesteia. El a văzut pe pagina din stânga numărul 36, iar pe pagina din dreapta numărul 81. Câte pagini a avut cartea lui Andrei?

Clasa a V- a

- 7 p** 1. În adunarea $2014 + \overline{AMIC} = \overline{HUMOR}$ sunt folosite cifrele distincte A, M, I, C, H, U, O și R . Determinați care este valoarea cea mai mare care o poate lua numărul $\overline{HRIMIUC}$.

- 7 p** 2. Determinați câte numere de forma \overline{aba} au suma cifrelor un număr par.

- 7 p** 3. Vârsta bunicului este exprimată printr-un număr natural de două cifre, cifrele reprezentând vârstele celor doi nepoți ai săi. Dacă suma celor trei vârste este de 100 de ani, determinați vârsta bunicului.

- 4.
- 3 p a) Calculați $9 + 99 + 999 + \dots + \overbrace{99\dots9}^{2014 \text{ cifre}}$.
- 4 p b) Fie a o cifră nenulă. Arătați că prin efectuarea sumei:
 $S = a + \overbrace{9a} + \overbrace{99a} + \overbrace{999a} + \dots + \overbrace{99\dots9a}^{2014 \text{ cifre}}$ se obține un număr a cărui scriere
 conține cel puțin 2010 cifre de 1.

Clasa a VI- a

- 7 p 1. Împărțiți mulțimea divizorilor lui 2014 în două mulțimi cu același număr de elemente și cu proprietatea că pentru fiecare dintre mulțimi, folosind unele dintre operațiile învățate precum și fiecare divizor câte o singură dată, se obțin rezultate egale.
- 7 p 2. Asupra unui număr natural n de trei cifre, având cifrele distincte, se aplică transformări succesive până când acest lucru nu mai este posibil. La fiecare transformare se mărește o singură cifră cu o unitate, numărul obținut având în continuare cifrele distincte. Notăm cu N numărul maxim de transformări ce se pot face asupra lui n . Arătați că dacă $n:3$ atunci $N:3$.
- 7 p 3. Fie segmentul $[AB]$ de lungime 3^{2014} cm. Notăm cu M mijlocul segmentului $[AB]$ și considerăm punctul P pe semidreapta $[AB]$ astfel încât $AP = 2^{3020}$ cm. Arătați că $AP + MP = AM$.
- 7 p 4. Se consideră segmentul $[AB]$ de lungime $AB = n \cdot 2^k$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și punctele $M_1, M_2, M_3, \dots, M_k$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$) respectiv mijloacele segmentelor $[AB]$, $[AM_1]$, $[AM_2]$, ..., $[AM_{k-1}]$. Determinați n și k știind că:
- $$AB + AM_1 + AM_2 + \dots + AM_k = 2^k \cdot 35840.$$

Clasa a VII- a

- 7 p** 1. Aflați câte numere raționale mai mari decât zero și subunitare au proprietatea că, scrise sub formă de fracție ireductibilă, au produsul dintre numărător și numitor egal cu suma numerelor naturale de la 1 la 2014.
- 7 p** 2. Fie $A = \{ \overline{0, a_1 a_2 a_3} / a_1, a_2, a_3 \text{ cifre nenule} \}$. Notăm cu N numărul elementelor mulțimii A și cu S suma acestora. Arătați că $N < 2S$.
- 7 p** 3. Fie ABC un triunghi. Arătați că dacă înălțimile din B și C sunt perpendiculare atunci triunghiul este dreptunghic.
- 7 p** 4. Fie $ABCD$ un paralelogram și $E \in AB$ astfel încât $CE \perp BD$ și M un punct oarecare pe dreapta CE . Să se arate că mediatoarea lui $[BD]$ trece prin mijlocul lui $[AM]$.

Clasa a VIII- a

- 7 p** 1. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi, ecuația:
$$2x^2 + 2y^2 - 3x - 3y + 2 = 0.$$
- 7 p** 2. Spunem că numărul natural n este "*magic*" dacă există n submulțimi disjuncte ale mulțimii $\{1, 2, 3, \dots, 2014\}$, fiecare având câte trei elemente și cu proprietatea că în fiecare din ele există un element care este egal cu produsul celorlalte două. Spre exemplu 3 este "*magic*": $\{2, 3, 6\}$, $\{4, 5, 20\}$, $\{7, 8, 56\}$.
- 3 p** c) Arătați că 5 este "*magic*".
- 4 p** d) Găsiți cel mai mare număr natural n care este "*magic*".
3. Un număr natural n se numește "*splendid*" dacă numărul elementelor rămase în mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ după îndepărtarea tuturor pătratelor perfecte este pătrat perfect.

- 3 p a) Arătați că 2070 este un număr "splendid".
4 p b) Determinați câte numere "splendide" mai mici decât 2014 există.

4. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub, T mijlocul segmentului CC' iar M mijlocul segmentului BC .

- 2 p c) Arătați că dreptele AM și $D'T$ sunt coplanare.
2 p d) Arătați că $D'TMA$ este un trapez isoscel.
3 p e) Calculați raportul dintre aria patrulaterului $D'TMA$ și aria triunghiului $D'AC$.