Matematica în Bucovina. Concursul Interjudeţean de matematică „Memorialul _David Hrimiuc_”

ediția a XXII-a, 6 – 8 noiembrie 2026

Clasa a VIII-a

1. (2p) a) Dacă x este un număr natural, arătați că $\left(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)^x \cdot \left(2\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)^x = 1$.

(5p) b) Determinați $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $\left(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)^x + \left(2\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)^x = 2$.

Dorel Ispășoiu, Gura Humorului

Barem:

a) $\left(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)^x \cdot \left(2\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)^x = \left[\left(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)\right]^x = (8-7)^x = 1$ **2p**

b) Folosind punctul a) obținem $\left(2\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)^x = \dfrac{1}{\left(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)^x}$ **1p**

Notând $\left(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)^x = a$, rezultă $a+\dfrac{1}{a}=2$ **2p**

$\Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \left(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$ soluţie unică **2p**

2. (7p) Determinați valoarea maximă a expresiei $E(x) = \dfrac{3x^2 + 6\sqrt{12}\cdot x + 46}{x^2 + 4\sqrt{3}\cdot x + 15}$.

(***)

Barem:

$E(x) = 3 + \frac{1}{x^2+4\sqrt{3}x+15}$ **2p**

$E(x) = 3 + \frac{1}{(x+2\sqrt{3})^2+3}$ **2p**

E(x) este maxim dacă $\left(x+2\sqrt{3}\right)^2 + 3$ este minim **1p**

$E(x) \leqslant E\left(-2\sqrt{3}\right)$, deci valoarea maximă este $E\left(-2\sqrt{3}\right) = \frac{10}{3}$ **2p**

3. (7p) Considerăm numerele strict pozitive x, y, z astfel încât $x + y + z = 2026$. Demonstrați că expresia $E(x,y,z) = \dfrac{x-y}{xy+2026z} + \dfrac{y-z}{yz+2026x} + \dfrac{z-x}{zx+2026y}$ este constantă.

(***)

Barem:

Avem $xy + 2026z = xy + (x+y+z)z = xy + xz + yz + z^2 =$
$= x(y+z) + z(y+z) = (x+z)(y+z)$ **2p**

și analoagele **2p**

Rezultă că $E(x,y,z)=\frac{x-y}{(x+z)(y+z)}+\frac{y-z}{(x+y)(x+z)}+\frac{z-x}{(x+y)(y+z)}==\frac{x^2-y^2+y^2-z^2+z^2-x^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}=0$ **3p**

4. (7p) Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC=15$ cm și $AC>AB$. Fie D mijlocul laturii BC. Mediatoarea laturii BC intersectează latura AC în punctul E. Știind că $DE=5$ cm, determinați măsura unghiului $\sphericalangle ABC$.

(***)

Barem:

Fie F mijlocul laturii $[AC]$ deci DF este linie mijlocie, $DF\perp AC$ **2p**

Notăm $EF=x\ \Rightarrow\ CE=x+7{,}5$. Folosind teorema catetei în triunghiul dreptunghic DEC obținem $DE^2=EF\cdot EC\ \Rightarrow\ 5^2=x\cdot(x,+7{,}5)\ \Rightarrow\ 2x^2+15x-50=0$ **2p**

Descompunem $(2x-5)\cdot(x+10)=0$. Cum $x>0$, obținem $x=2{,}5$ **2p**

Finalizare $CE=10\ \Rightarrow\ \hat{C}=30^\circ\ \Rightarrow \hat{B}=60^\circ$ **1p**

Notă: *Se punctează corespunzător orice variantă corectă de rezolvare.*