Concursul Internaţional de Matematică David Hrimiuc

Ediţia a XXII-a, Gura Humorului, Noiembrie 2026

Subiecte - Clasa a 7-a

Problema 1. Fie numerele naturale nenule a, b, c.
a) Arătaţi că $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ şi apoi, că $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.
b) Dacă a, b, c sunt distincte două câte două, arătaţi că $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca + 3$.

Problema 2. Spunem despre un număr $k \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ că este special, dacă oricum alege Alex k numere distincte din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 9\}$, Bogdan poate alege unele dintre numerele rămase nealese de Alex, distincte şi ele, astfel încât suma numerelor alese de Bogdan să fie egală cu suma numerelor alese de Alex. Arătaţi că singurul număr special este 2.

Problema 3. Fie $ABCD$ un pătrat cu lungimea laturii egală cu 1. În interiorul laturilor AB, BC, CD şi DA se iau respectiv punctele E, F, G şi H.
a) Dacă $AE + CG = AH + CF = 1$, arătaţi că segmentele EG şi FH sunt congruente şi perpendiculare.
b) Dacă $AE + CG + AH + CF = 2$, arătaţi că segmentele EG şi FH sunt congruente şi perpendiculare.

Problema 4. În fiecare dintre cele 16 celule ale unui tablou 4×4 se scrie câte un număr natural care dă restul 1 la împărţirea cu 4, astfel încât suma numerelor scrise pe oricare linie sau coloană să dea restul 4 la împărţirea cu 16. Notăm cu a, b, c, d produsele numerelor de pe linii şi cu x, y, z, t produsele numerelor de pe coloane.
a) Daţi exemplu de un astfel de tablou, în care toate numerele să fie diferite.
b) Arătaţi că numerele a, b, c, d, x, y, z, t dau restul 1 la împărţirea cu 16.
c) Arătaţi că $256 \mid a + b + c + d - x - y - z - t$.

Timp de lucru 3 ore
Fiecare problemă va fi notată cu maxim 7 puncte