Concursul Internaţional de Matematică David Hrimiuc

Ediţia a XXII-a, Gura Humorului, Noiembrie 2026

Barem de corectare şi soluţii - Clasa a 7-a

Fiecare problemă se notează cu maximum 7 puncte. Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

Problema 1. Fie numerele naturale nenule a, b, c.
a) Arătaţi că $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ şi apoi, că $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.
b) Dacă a, b, c sunt distincte două câte două, arătaţi că $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca + 3$.

a) Avem $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$. (1 punct)

Atunci $2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$. (1 punct)

Pătratele din membrul drept sunt nenegative, deci

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

(1 punct)

Alternativ, se poate folosi inegalitatea mediilor.

b) Deoarece expresia este simetrică, putem presupune $a < b < c$. Numerele fiind naturale, rezultă

$$b - a \geq 1, \qquad c - b \geq 1, \qquad c - a \geq 2.$$

(2 puncte)

Din identitatea de la a) obţinem

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2} \geq \frac{1+1+4}{2} = 3,$$

adică $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca + 3$. (2 puncte)

Observaţie. La a), egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c$. La b), egalitatea are loc dacă şi numai dacă a, b, c sunt, într-o anumită ordine, trei numere naturale nenule consecutive.

Problema 2. Spunem despre un număr $k \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ că este special, dacă oricum alege Alex k numere distincte din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 9\}$, Bogdan poate alege unele dintre numerele rămase nealese de Alex, distincte şi ele, astfel încât suma numerelor alese de Bogdan să fie egală cu suma numerelor alese de Alex. Arătaţi că singurul număr special este 2.

Pentru $k = 1$, Alex poate alege numărul 1, pe care Bogdan nu îl poate realiza ca sumă din numerele rămase, pentru că sunt toate mai mari ca 1. (1 punct)

Pentru orice $k \in \{3, 4, \ldots, 9\}$, Alex poate alege o mulţime de k numere care conţine $7, 8, 9$. Suma numerelor alese de Alex este atunci cel puţin 24, iar suma tuturor numerelor rămase este cel mult $45 - 24 = 21$. Bogdan nu poate obţine suma lui Alex. Prin urmare, $k \leq 2$. (2 puncte)

Pentru $k = 2$, fie $a < b$ numerele alese de Alex şi fie $s = a + b$. Avem $3 \leq s \leq 17$. Dacă $s \leq 9$, Bogdan alege numărul s. Acesta aparţine mulţimii date şi nu a fost ales de Alex, deoarece $s > b > a$. (1 punct)

Dacă $10 \leq s \leq 15$, considerăm perechile $\{9, s-9\}$ şi $\{8, s-8\}$. Fiecare conţine două numere distincte din mulţimea dată, iar suma numerelor fiecărei perechi este s. Cele două perechi sunt disjuncte. O pereche cu suma s care conţine a sau b trebuie să coincidă cu $\{a, b\}$. Aşadar, cel puţin una dintre cele două perechi nu conţine niciun număr ales de Alex, iar Bogdan o poate alege. (2 puncte)

Dacă $s = 16$, atunci $\{a, b\} = \{7, 9\}$, iar Bogdan alege $\{2, 6, 8\}$, deoarece $2 + 6 + 8 = 16$.
Dacă $s = 17$, atunci $\{a, b\} = \{8, 9\}$, iar Bogdan alege $\{4, 6, 7\}$, deoarece $4 + 6 + 7 = 17$.

(1 punct)

Problema 3. Fie $ABCD$ un pătrat cu lungimea laturii egală cu 1. În interiorul laturilor AB, BC, CD şi DA se iau respectiv punctele E, F, G şi H.
a) Dacă $AE+CG = AH+CF = 1$, arătaţi că segmentele EG şi FH sunt congruente şi perpendiculare.
b) Dacă $AE+CG+AH+CF = 2$, arătaţi că segmentele EG şi FH sunt congruente şi perpendiculare.

a) Din $AE + CG = 1 = AB = CD$ deducem că $AE = DG$ (1 punct)

Cum $AE \parallel DG$ şi $AE, DG \perp AD$, deducem că $AEGD$ este un dreptunghi, deci $EG = AD$ şi $EG \parallel AD$. (1 punct)

Analog $FH = AB$ şi $FH \parallel AB$. Atunci, avem $EG = AD = AB = FH$ şi fiind fiecare paralele cu segmente care sunt perpendiculare, rezultă că $EG \perp FH$. (1 punct)

b) Din $AE+CG+AH+CF = 2$, deducem că cel puţin una dintre sumele $AE+CG$ şi $AH + CF$ este cel puţin egală cu 1. Presupunem fără a restânge generalitatea că $AE + CG \geq 1$. Dacă $AE + CG = 1$, suntem în cazul de la punctul a). Presupunem că $AE + CG > 1$. (1 punct)

Fie G' şi H' proiecţiile punctelor G şi H pe AB, respectiv BC. Atunci avem $G'E = AE + G'B - AB = AE + GC - 1 = 1 - AH - CF = BC - BH' - CF = FH'$. Atunci, conform cazului C.C. deducem că $\Delta GG'E \equiv HH'F$. (2 puncte)

De aici rezultă imediat că $EG = FH$ şi că $\angle FHH' \equiv \angle EGG'$ (*). Notăm cu $R = HH' \cap GG'$, $S = EG \cup FH$ şi $T = GG' \cap FH$. Atunci în triunghiul TSG avem $\angle TSG = 180^\circ - \angle SGT - \angle STG \overset{(*)}{=} 180^\circ - \angle RHT - \angle RTH = \overset{\Delta RTH}{\angle} HRT = 90^\circ$, pentru că dreptele GG' şi HH' sunt perpendiculare. Atunci, $EG \perp FH$. (1 punct)

Problema 4. În fiecare dintre cele 16 celule ale unui tablou 4×4 se scrie câte un număr natural care dă restul 1 la împărţirea cu 4, astfel încât suma numerelor scrise pe oricare linie sau coloană să dea restul 4 la împărţirea cu 16. Notăm cu a, b, c, d produsele numerelor de pe linii şi cu x, y, z, t produsele numerelor de pe coloane.
a) Daţi exemplu de un astfel de tablou, în care toate numerele să fie diferite.
b) Arătaţi că numerele a, b, c, d, x, y, z, t dau restul 1 la împărţirea cu 16.
c) Arătaţi că $256 \mid a + b + c + d - x - y - z - t$.

a) Un număr care dă restul 1 la împărţirea cu 16, dă restul 1 şi la împărţirea cu 4. Atunci alegem 16 astfel de numere distincte două câte două. Un exemplu este tabloul

$$\begin{pmatrix} 1 & 17 & 33 & 49 \\ 65 & 81 & 97 & 113 \\ 129 & 145 & 161 & 177 \\ 193 & 209 & 225 & 241 \end{pmatrix}$$

(3 puncte)

b) Pe o linie sau coloană, scriem numerele sub forma $1+4u_1, \ldots, 1+4u_4$. Din condiția asupra sumei rezultă $u_1 + \cdots + u_4 \equiv 0 \pmod 4$, deci $(1+4u_1)(1+4u_2)\ldots(1+4u_4) \equiv 1 + 4(u_1 + \cdots + u_4) \equiv 1 \pmod{16}$. Așadar, toate numerele a, b, c, d, x, y, z, t sunt congruente cu 1 modulo 16. (2 puncte)

c) Pentru patru numere $A_i = 1 + 16v_i$, avem $A_1A_2A_3A_4 \equiv 1 + 16(v_1 + \cdots + v_4) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 3 \pmod{256}$. Aplicând această relație, obținem $a + b + c + d - 3 \equiv abcd = xyzt \equiv x + y + z + t - 3 \pmod{256}$, unde egalitatea $abcd = xyzt$ rezultă fiindcă ambele reprezintă produsul tuturor numerelor din tablou. Prin urmare, $256 \mid a + b + c + d - x - y - z - t$. (2 puncte)

Spunem că numerele întregi a şi b sunt congurente modulo n şi notăm $a \equiv b \pmod n$ dacă şi numai dacă $n|a - b$.