Matematica în Bucovina. Concursul Interjudețean de matematică „Memorialul *David Hrimiuc*”

ediția a XXII-a, 6 – 8 noiembrie 2026

Clasa a VI-a

1. a) (3p) Determinați restul împărțirii numărului $1013^{10}-2$ la 7.

b) (4p) Aflați numerele prime p și q știind că $p\cdot\left(p^{10}-q\right)=2026$.

Gazeta Matematică

Soluție și barem de notare:

a) Avem $1013^{10}=\left(7\cdot 145-2\right)^{10}=M_7+2^{10}$. Rezultă $1013^{10}-2=M_7+1022=M_7+7\cdot 146$, deci $1013^{10}-2\vdots 7$, adică restul cerut este 0. **..... 3p**

b) Descompunerea lui 2026 în factori primi este $2026=2\cdot 1013$. Cum p este număr prim și p divide 2026, rezultă $p\in\{2,1013\}$. **..... 2p**

Dacă $p=1013$, atunci $p^{10}-q=2$, de unde $q=1013^{10}-2$. Din a) avem $q\vdots 7$, deci q nu este prim, fals. Rămâne $p=2$, iar din $p\cdot\left(p^{10}-q\right)=2026$, obținem $q=11$. **..... 2p**

2. (7p) Arătați că suma tuturor fracțiilor subunitare care au numitorul mai mic decât 2026 este număr natural.

Dorel Ispășoiu, Gura Humorului

Soluție și barem de notare:

Notăm cu S suma cerută în problemă. Avem succesiv:

$$S=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2025}+\frac{2}{2025}+\ldots+\frac{2024}{2025}\right)$$ **..... 3p**

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1+2}{3}+\frac{1+2+3}{4}+\frac{1+2+3+4}{5}+\ldots+\frac{1+2+3+\ldots+2024}{2025}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3\cdot 4}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4\cdot 5}{2}+\ldots+\frac{1}{2025}\cdot\frac{2024\cdot 2025}{2}$$ **..... 2p**

$$S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{2024}{2}=\frac{1+2+3+\ldots+2024}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2024\cdot 2025}{2}=506\cdot 2025\in\mathbb{N}$$ **..... 2p**

3. (7p) Doi copii, Ana și Bogdan, joacă următorul joc:

Ana alege n numere naturale ($n\geq 2$), nu neapărat distincte, apoi, pentru fiecare dintre numerele alese, ea scrie fiecare divizor natural al acelui număr pe câte un cartonaș. Ana amestecă toate aceste cartonașe, apoi i le dă lui Bogdan. Bogdan cunoaște regula după care a completat Ana aceste cartonașe și are voie să se uite la toate cartonașele. Bogdan câștigă doar dacă ghicește toate numerele alese inițial de Ana. În caz contrar câștigă Ana.

Care dintre cei doi copii are o strategie câștigătoare la acest joc?

Cristi Săvescu, Cluj-Napoca

Soluție și barem de notare:

Bogdan are strategie de câștig, indiferent de numerele alese de Ana. **..... 1p**

Fie M cel mai mare număr înscris pe cartonașe. Acesta este chiar cel mai mare dintre numerele alese de Ana deoarece fiecare număr ales inițial apare pe un cartonaș, iar divizorii săi nu sunt mai mari decât el. **..... 3p**

Bogdan înlătură apoi câte un cartonaș pentru fiecare divizor al lui M. Cartonașele rămase sunt exact cele corespunzătoare celorlalte $n-1$ numere. Procedeul este valabil și dacă Ana a ales de mai multe ori numărul M, deoarece se elimină doar cartonașele corespunzătoare unei singure apariții a lui. Repetând procedeul de n ori, Bogdan determină toate numerele alese. **..... 3p**

4. (7p) Fie $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ două unghiuri suplementare nenule, astfel încât $\sphericalangle BOC < \sphericalangle AOB$. Semidreptele $(OM$ și $(OP$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$, respectiv $\sphericalangle COM$. Știind că $\sphericalangle BOP = 15°$, determinați toate valorile posibile ale unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$.

Artur Bălăucă, Aritmetică, algebră, geometrie - teme pentru centrele de excelență

Soluție și barem de notare:

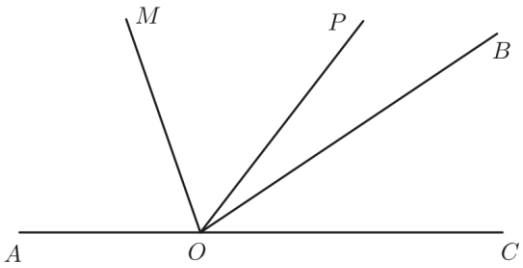
Notăm $\sphericalangle AOB = x$. Deoarece $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt suplementare, avem $\sphericalangle BOC = 180° - x$. Cum unghiurile sunt nenule și $\sphericalangle BOC < \sphericalangle AOB$, deducem că $90° < x < 180°$. Datorită faptului că $(OM$ este bisectoarea $\sphericalangle AOB$, avem $\sphericalangle AOM = \sphericalangle BOM = \frac{x}{2}$. **..... 2p**

Cazul 1. Unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente suplementare.

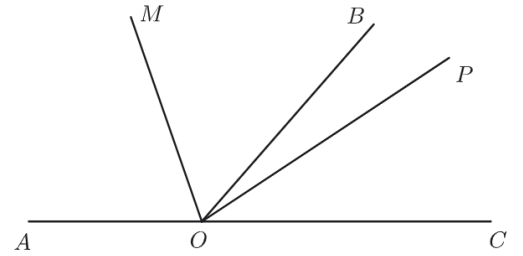
Cum $(OP$ este bisectoarea $\sphericalangle COM$, avem $\sphericalangle POM = \frac{1}{2}\left(180° - \frac{x}{2}\right) = 90° - \frac{x}{4}$. **..... 1p**

Avem două subcazuri:

Cazul 1.1. Semidreapta OP este între OB și OM. Atunci avem $\sphericalangle BOP = \sphericalangle BOM - \sphericalangle POM$, adică $15° = \frac{x}{2} - \left(90° - \frac{x}{4}\right)$, de unde $x = 140°$. Așadar, o soluție este $\sphericalangle AOB = 140°$ și $\sphericalangle BOC = 40°$. **..... 1 p**

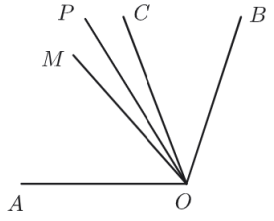


Cazul 1.2. Semidreapta OP este între OB și OC. Atunci avem $\sphericalangle BOP = \sphericalangle POM - \sphericalangle BOM$, adică $15° = \left(90° - \frac{x}{4}\right) - \frac{x}{2}$, de unde $x = 100°$. Așadar, a doua soluție este $\sphericalangle AOB = 100°$ și $\sphericalangle BOC = 80°$. **..... 1 p**

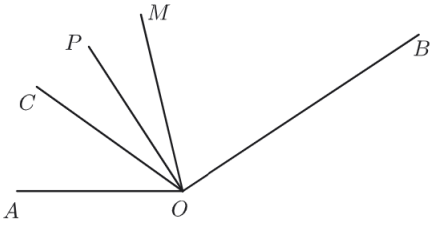


Cazul 2. Unghiurile suplementare $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ nu sunt adiacente. Atunci $(OC$ este situată în interiorul unghiului $\sphericalangle AOB$. Avem și aici două subcazuri:

Cazul 2.1. OM se află între OA și OC



Cazul 2.2. OM se află între OC și OB



În ambele situații măsura $\sphericalangle BOP$ este media aritmetică a măsurilor $\sphericalangle BOM$ și $\sphericalangle BOC$, adică $\sphericalangle BOP = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + (180° - x)\right)$. Rezultă $90° - \frac{x}{4} = 15°$, de unde rezultă $x > 180°$, imposibil. Așadar în cazul 2 nu mai găsim soluții. **..... 2p**

Notă: *Se punctează corespunzător orice variantă corectă de rezolvare.*