

**Matematica în Bucovina. Concursul Interjudețean de
matematică „Memorialul David Hrimiuc”
ediția a XXI-a, 7-9 noiembrie 2025**

Clasa a VI-a

- 1. Arătați că:** **a) (4p)** dacă 3 divide $\overline{abc}$ atunci 3 divide $4a + 7b + 10c$
 b) (3p) 7 divide $\overline{abc}$ dacă și numai dacă 7 divide $2a + 3b + c$

Soluție și barem de notare

- a) $\overline{abc} : 3 \Leftrightarrow a + b + c : 3$ 1p
 $3(a+2b+3c) : 3$ 1p
 $a + b + c + 3(a + 2b + 3c) : 3 \Rightarrow 4a + 7b + 10c : 3$ 2p
 b) $\overline{abc} : 7 \Leftrightarrow (100a + 10b + c) : 7$ 1p
 $[(100a + 10b + c) - 7(14a + b)] : 7$ 1p
 $(2a + 3b + c) : 7$ 1p

2.a) (3p) Șirul de numere naturale 1, 5, 9, 13, se aranjează pe rânduri și coloane astfel:

			1		
		5	9	13	
	17	21	25	29	33
37	41				

Pe ce rând se va așeza numărul 2025 și al câtelea va fi în acel rând?

b) (4p) Demonstrați că dacă numerele m și n sunt prime între ele, atunci există un număr natural nenul k astfel încât $m^k - 1$ se divide la n .

Soluție și barem.

a) Se observă că pe coloana centrală sunt pătratele perfecte de forma $(2 \cdot 1 - 1)^2$, $(2 \cdot 2 - 1)^2$, $(2 \cdot 3 - 1)^2$, Cum $2025 = 45^2 = (2 \cdot 23 - 1)^2$, 2025 se află pe rândul 23....2p

Fiecare rând conține $2n-1$ numere și deci 2025 va fi al 23-lea număr de pe rândul 23....1p

b) Considerăm următorul șir de puteri ale lui m : $m^0, m^1, m^2, m^3, \dots, m^n$. Deoarece șirul conține $n+1$ termeni, rezultă, folosind principiul lui Dirichlet, că există doi termeni care dau același rest la împărțirea cu n2p

Deci, există $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$ astfel încât $n/m^q - m^p \Rightarrow$ 1p

$$\Rightarrow n/m^p (m^{q-p} - 1) \stackrel{(n, m^p)=1}{\Rightarrow} n/m^{q-p} - 1 \Rightarrow n/m^k - 1, \text{ unde } k = q - p \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 1p$$

3)a) (5p) Aflați numerele naturale m și n dacă avem simultan : i) $n = 5^y \cdot 11^z$, ii) $m = 2^x \cdot 11^z$, iii) n are 15 divizori naturali, iv) m are 12 divizori naturali.

b) (2p) Pentru m și n determinați la punctul **a)** cu $m \cdot n : 11$, aflați suma cifrelor numărului $A = m \cdot n$

Soluție și barem.

b) n are 15 divizori $\Rightarrow (y+1)(z+1) = 15 \Rightarrow 15 : (z+1)$ 1p

m are 12 divizori $\Rightarrow (x+1)(z+1) = 12 \Rightarrow 12 : (z+1)$ 1p

Obține $z + 1$ divide 3 și deci $z = 0$ sau $z = 2$ 1p

Pentru $z = 0 \Rightarrow y = 14$ și $x = 11 \Rightarrow n = 5^{14}$, $m = 2^{11}$ 1p

Pentru $z = 2 \Rightarrow y = 4$ și $x = 3 \Rightarrow n = 5^4 \cdot 11^2$, $m = 2^3 \cdot 11^2$ 1p

b) Pentru $m \cdot n : 11$ alegem $n = 5^4 \cdot 11^2$, $m = 2^3 \cdot 11^2 \Rightarrow m \cdot n = 5^4 \cdot 2^3 \cdot 11^4$ 1p

$\Rightarrow m \cdot n = 5 \cdot 5^3 \cdot 2^3 \cdot 11^4 = 5 \cdot 14621 \cdot 10^3 = 73205000$ cu suma cifrelor 17.....1p

4) (7p) Fie $[OM]$ bisectoarea unui unghi propriu AOB , și o semidreaptă oarecare $[OC]$, interioară unghiului AOB și diferită de $[OM]$. Arătați că unghiul COM are măsura egală cu semidiferența unghiurilor COA și COB sau COB și COA .

Soluție și barem.

I. $OC \subset \text{Int}(\angle BOM) \Rightarrow \angle COM = \angle BOM - \angle COB = \frac{\angle BOA - 2\angle COB}{2}$ 2p

$\Rightarrow \angle COM = \frac{(\angle BOA - \angle COB) - \angle COB}{2} \angle COM = \frac{1}{2} \cdot (\angle COA - \angle COB)$ 2p

II $OC \subset \text{Int}(\angle AOM) \Rightarrow \angle COM = \angle AOM - \angle COA = \frac{\angle BOA - 2\angle COA}{2}$ 2p

$\Rightarrow \angle COM = \frac{(\angle BOA - \angle COA) - \angle COA}{2} = \frac{1}{2} \cdot (\angle COB - \angle COA)$ 1p