Matematica în Bucovina. Concursul Internaţional „Memorialul David Hrimiuc” ediţia a XVII- a, 18 decembrie 2021

Clasa a VIII- a

Barem de corectare

1. Determinați x ∈ N astfel încât $\sqrt{x^2 - x + 9} \in N$.

***

Rezolvare.

Cum x este număr natural și $\sqrt{x^2 - x + 9} \in N$ => $x^2 - x + 9$ este pătrat perfect.

Fie $x^2 - x + 9 = p^2 \mid \cdot 4 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 36 = 4p^2$ cu $p \in N \Leftrightarrow$

$4x^2 - 4x + 1 + 35 = 4p^2 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 + 35 = 4p^2 \Leftrightarrow 4p^2 - (2x - 1)^2 = 35 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2p - 2x + 1)(2p + 2x - 1) = 35 \Leftrightarrow \begin{cases} 2p - 2x + 1 = 1 \\ 2p + 2x - 1 = 35 \end{cases}$ sau $\begin{cases} 2p - 2x + 1 = 5 \\ 2p + 2x - 1 = 7 \end{cases}$

sau $\begin{cases} 2p - 2x + 1 = 7 \\ 2p + 2x - 1 = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} 2p - 2x + 1 = 35 \\ 2p + 2x - 1 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2p - 2x + 1 = 5 \\ 2p + 2x - 1 = 7 \end{cases}$

Rezolvând sistemele avem x =0 , x = 1, x = 9 iar x = -8. $\notin \mathbb{N}$

Barem de notare:

1 Cum x este număr natural și $\sqrt{x^2 - x + 9} \in N$ => $x^2 - x + 9$ este pătrat perfect.	1p
Fie $x^2 - x + 9 = p^2 \mid \cdot 4 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 36 = 4p^2$ cu $p \in N \Leftrightarrow$ $4x^2 - 4x + 1 + 35 = 4p^2 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 + 35 = 4p^2 \Leftrightarrow 4p^2 - (2x - 1)^2 = 35 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (2p - 2x + 1)(2p + 2x - 1) = 35$	2p
$\begin{cases} 2p - 2x + 1 = 1 \\ 2p + 2x - 1 = 35 \end{cases}$ sau $\begin{cases} 2p - 2x + 1 = 5 \\ 2p + 2x - 1 = 7 \end{cases}$ sau $\begin{cases} 2p - 2x + 1 = 7 \\ 2p + 2x - 1 = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} 2p - 2x + 1 = 35 \\ 2p + 2x - 1 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2p - 2x + 1 = 5 \\ 2p + 2x - 1 = 7 \end{cases}$	2p
Rezolvând sistemele avem x =0 , x = 1, x = 9 iar x = -8. $\notin \mathbb{N}$	2p

2. Să se arate că :

a) $\frac{3}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$

$\frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + ... + \frac{1010}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... 2021} < \frac{1}{2}$

Rezolvare

a) Se aduc la acelasi numitor prin amplificarea primei fractii cu 7 si apoi finalizare

b)

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3};\ \frac{2}{3\cdot 5}=\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5};\ \frac{3}{3\cdot 5\cdot 7}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7};\ \ldots$$

$$\frac{1010}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot 2021}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 2019}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 2021}.$$ Prin însumarea membrilor egalităţilor obţinem relaţia cerută

Barem de notare:

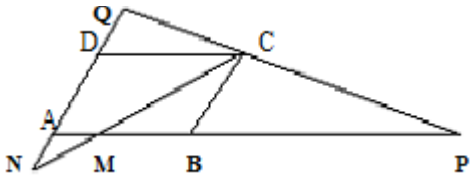
a) Efectuează calculele	2p
b) $\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3};\ \frac{2}{3\cdot 5}=\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5};\ \frac{3}{3\cdot 5\cdot 7}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7};\ \ldots$	2p
$\frac{1010}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot 2021}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 2019}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 2021}$	1p
Însumarea relațiilor	1p
Finalizare	1p

3. Fie paralelogramul ABCD și in afara planului (ABC) un punct V. Dacă M$\in$[AB], N$\in$AD cu A$\in$[ND] astfel încât [BM]$\equiv$[BC] iar [NA]$\equiv$[AM]. Prin punctul C se duce o dreaptă variabilă care intersectează dreptele AB şi AD în punctele P şi Q. Să se demonstreze că:

a) C,N,M,V sunt coplanare

b) BP$\cdot$DQ = constant

c) CQ$\cdot$PM=CP$\cdot$QN



a) [NA]$\equiv$[AM] $\Rightarrow \sphericalangle ANM=\sphericalangle AMN=\left(180^0-\sphericalangle MAN\right):2$;

[BM]$\equiv$[BC] $\Rightarrow$ $\sphericalangle BMC=\sphericalangle BCM=\left(180^0-\sphericalangle MBC\right):2$ şi cum $\sphericalangle$NAM$\equiv\sphericalangle$MBC (alt. int.) $\Rightarrow$ $\sphericalangle$AMN$\equiv\sphericalangle$CMB iar A,M,B fiind coliniare$\Rightarrow$N,M,C coliniare și deci C,N,M,V sunt coplanare

b) $\Delta QDC\sim\Delta CBP(U.U.)\Rightarrow\frac{QD}{CB}=\frac{DC}{BP}\Rightarrow BP\cdot DQ=DC\cdot CB\Rightarrow$ BP$\cdot$DQ = constant

c) Se aplică teorema lui Menelaos în ΔQAP cu secanta CN$\Rightarrow\frac{NA}{NQ}\cdot\frac{CQ}{CP}\cdot\frac{PM}{MA}=1$ şi cum [NA]$\equiv$[AM] se obţine $\frac{CQ}{CP}\cdot\frac{PM}{NQ}=1\Rightarrow CQ\cdot PM=CP\cdot NQ$

Barem de notare:

a) [NA]≡[AM] $\Rightarrow \sphericalangle ANM = \sphericalangle AMN = \left(180^0 - \sphericalangle MAN\right):2$;[BM]≡[BC] $\Rightarrow$ $\sphericalangle BMC = \sphericalangle BCM = \left(180^0 - \sphericalangle MBC\right):2$	1p
cum $\sphericalangle$ NAM ≡ $\sphericalangle$ MBC (alt. int.) $\Rightarrow$ $\sphericalangle$ AMN ≡ $\sphericalangle$ CMB iar A,M,B fiind coliniare $\Rightarrow$ N,M,C coliniare şi deci C,N,M,V sunt coplanare	1p
$b)\ \Delta QDC \sim \Delta CBP (U.U.)$	1p
$\frac{QD}{CB} = \frac{DC}{BP} \Rightarrow BP \cdot DQ = DC \cdot CB \Rightarrow$ BP · DQ = constant	2p
c) Se aplică teorema lui Menelaos în Δ QAP cu secanta CN $\Rightarrow \frac{NA}{NQ} \cdot \frac{CQ}{CP} \cdot \frac{PM}{MA} = 1$	1p
cum [NA]≡[AM] se obţine $\frac{CQ}{CP} \cdot \frac{PM}{NQ} = 1 \Rightarrow CQ \cdot PM = CP \cdot NQ$	1p

4. Pe laturile AB și AC ale prismei triunghiulare regulate ABCA`B`C`se consideră punctele M și N astfel încât AN>AM. Să se arate că B`M şi C`N sunt necoplanare.

Solutie :

(ABB`)∩(ACC`) = AA`. B`M∩AA`={P}, C`N∩AA`={Q}.

$\triangle B`BM \sim \triangle PAM \Rightarrow \frac{B`B}{PA} = \frac{BM}{AM} \Rightarrow B`B \cdot AM = PA \cdot BM$ şi

$\triangle C`CN \sim \triangle QAN \Rightarrow \frac{C`C}{QA} = \frac{CN}{AN} \Rightarrow C`C \cdot AN = QA \cdot CN$

Cum AN>AM și BB`=CC`, obținem $PA \cdot BM < QA \cdot CN$

CN<BM $\Rightarrow$ PA<QA $\Rightarrow$

Q și A sunt puncte distincte pa AA` $\Rightarrow$ B`M∩C`N=∅ şi deci sunt necoplanare.

Barem de notare:

(ABB`)∩(ACC`) = AA`. B`M∩AA`={P}, C`N∩AA`={Q}.	1p
$\triangle B`BM \sim \triangle PAM \Rightarrow \frac{B`B}{PA} = \frac{BM}{AM} \Rightarrow B`B \cdot AM = PA \cdot BM$	1p
$\triangle C`CN \sim \triangle QAN \Rightarrow \frac{C`C}{QA} = \frac{CN}{AN} \Rightarrow C`C \cdot AN = QA \cdot CN$	1p
Cum AN>AM și BB`=CC`, obținem $PA \cdot BM < QA \cdot CN$, iar CN<BM $\Rightarrow$ PA<QA	2p
Q și A sunt puncte distincte pa AA` $\Rightarrow$ B`M∩C`N=∅ şi deci sunt necoplanare.	2p