

**Matematica în Bucovina. Concursul Internațional de
matematică „Memorialul David Hrimiuc”
ediția a XIII - a, 4 noiembrie – 6 noiembrie 2016**

Clasa a VIII- a

Subiecte:

1. (7p) Determinați numerele reale x și y știind că

$$[x] + [y] = x\sqrt{x^2} + y\sqrt{y^2} = 1.$$

Am notat $[a]$ partea întreagă a numărului real a .

2. (7p) Arătați că numărul $(3n+1)^3 - (3n-1)^3$ se scrie ca suma a trei pătrate perfecte, nenule, diferite, oricare ar fi $n \geq 1$, număr natural.

3. a) (2p) Să se arate că $(a+b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$, pentru orice a, b numere pozitive.

b) (5p) Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}_+^*$ cu $abc = 512$. Arătați că:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{1024}.$$

4. (7p) În triunghiul ABC construim înălțimile $BD, D \in [AC]$ și $CE, E \in [AB]$, concurente în H . Arătați că $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$ dacă și numai dacă $P_{\Delta BCH} = 2 \cdot P_{\Delta DEH}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.