

**Matematica în Bucovina. Concursul Internațional de
matematică „Memorialul David Hrimiuc”
ediția a XIII - a, 4 noiembrie – 6 noiembrie 2016**

Clasa a V - a

Barem de corectare

1. (7p) Aflați numărul natural a pentru care:

$$\{1754 - [1836 : 9 + (1916 - a) + 456] : 4 + 278\} + 534 = 2016$$

Soluție. $\{1754 - [1836 : 9 + (1916 - a) + 456] : 4 + 278\} + 534 = 2016 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1754 - [1836 : 9 + (1916 - a) + 456] : 4 + 278 = 1482 \quad \text{(1p)}$$

$$\Leftrightarrow 1754 - [1836 : 9 + (1916 - a) + 456] : 4 = 1204 \quad \text{(1p)}$$

$$\Leftrightarrow 1836 : 9 + (1916 - a) + 456 = 2200 \quad \text{(1p)} \Leftrightarrow 1836 : 9 + (1916 - a) = 1744 \quad \text{(1p)}$$

$$\Leftrightarrow 204 + (1916 - a) = 1744 \quad \text{(1p)} \Leftrightarrow 1916 - a = 1540 \quad \text{(1p)} \Leftrightarrow a = 376 \quad \text{(1p)}$$

2. a) (2p) Calculați produsul numerelor a căror sumă este 130 și diferența lor este 94.

b) (5p) Câte numere de forma \overline{abc} , cu a, b, c cifre diferite, există, dacă

$$\overline{aaa} + \overline{bbb} + \overline{ccc} + a + b + c = 2016 ?$$

*Gheorghe Crăciun, Ploiești
(E:14992, GMB 4 / 2016)*

Soluție. a) Fie x, y numerele căutate.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 130 \\ x - y = 94 \end{array} \right\} (0,5p) \Rightarrow 2 \cdot x = 224 \Rightarrow x = 112 \quad (0,5p) \left. \vphantom{\begin{array}{l} x + y = 130 \\ x - y = 94 \end{array}} \right\} \Rightarrow P = x \cdot y = 2016 \quad (0,5p)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 130 \\ x = 112 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 18 \quad (0,5p)$$

b) $\overline{aaa} + \overline{bbb} + \overline{ccc} + a + b + c = 2016 \Leftrightarrow 111 \cdot a + 111 \cdot b + 111 \cdot c + a + b + c = 2016 \Leftrightarrow \quad \text{(0,25p)}$

$$\Leftrightarrow 112 \cdot (a + b + c) = 2016 \quad \text{(0,25p)} \Leftrightarrow a + b + c = 18 \quad \text{(0,25p)}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b + c = 17 \end{array} \right., \text{adică } \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 8 \\ c = 9 \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 9 \\ c = 8 \end{array} \right. \quad 2 \text{ soluții} \quad \text{(0,25p)}$$

$$\text{sau } \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b + c = 16 \end{array} \right., \text{adică } \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 7 \\ c = 9 \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 9 \\ c = 7 \end{array} \right. \quad 2 \text{ soluții} \quad \text{(0,25p)}$$

$$\text{sau } \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b + c = 15 \end{array} \right., \text{adică } \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 7 \\ c = 8 \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 8 \\ c = 7 \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 9 \\ c = 6 \end{array} \right. \quad 4 \text{ soluții} \quad \text{(0,5p)}$$

$$\text{sau } \left\{ \begin{array}{l} a = 4 \\ b + c = 14 \end{array} \right., \text{adică } \left\{ \begin{array}{l} a = 4 \\ b = 5 \\ c = 9 \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} a = 4 \\ b = 6 \\ c = 8 \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} a = 4 \\ b = 8 \\ c = 6 \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} a = 4 \\ b = 9 \\ c = 5 \end{array} \right. \quad 4 \text{ soluții} \quad \text{(0,5p)}$$

$$\text{sau } \left\{ \begin{array}{l} a = 5 \\ b + c = 13 \end{array} \right., \text{adică } \left\{ \begin{array}{l} a = 5 \\ b = 4 \\ c = 9 \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} a = 5 \\ b = 6 \\ c = 7 \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} a = 5 \\ b = 7 \\ c = 6 \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} a = 5 \\ b = 9 \\ c = 4 \end{array} \right. \quad 4 \text{ soluții} \quad \text{(0,5p)}$$

$$\text{sau } \begin{cases} a=6 \\ b+c=12 \end{cases}, \text{ adică } \begin{cases} a=6 \\ b=3 \\ c=9 \end{cases}, \begin{cases} a=6 \\ b=4 \\ c=8 \end{cases}, \begin{cases} a=6 \\ b=5 \\ c=7 \end{cases}, \begin{cases} a=6 \\ b=7 \\ c=5 \end{cases}, \begin{cases} a=6 \\ b=8 \\ c=4 \end{cases}, \begin{cases} a=6 \\ b=9 \\ c=3 \end{cases} \quad 6 \text{ soluții} \quad (0,5p)$$

$$\text{sau } \begin{cases} a=7 \\ b+c=11 \end{cases}, \text{ adică } \begin{cases} a=7 \\ b=2 \\ c=9 \end{cases}, \begin{cases} a=7 \\ b=3 \\ c=8 \end{cases}, \begin{cases} a=7 \\ b=5 \\ c=6 \end{cases}, \begin{cases} a=7 \\ b=6 \\ c=5 \end{cases}, \begin{cases} a=7 \\ b=8 \\ c=3 \end{cases}, \begin{cases} a=7 \\ b=9 \\ c=2 \end{cases} \quad 6 \text{ soluții} \quad (0,5p)$$

$$\text{sau } \begin{cases} a=8 \\ b+c=10 \end{cases}, \text{ adică } \begin{cases} a=8 \\ b=1 \\ c=9 \end{cases}, \begin{cases} a=8 \\ b=3 \\ c=7 \end{cases}, \begin{cases} a=8 \\ b=4 \\ c=6 \end{cases}, \begin{cases} a=8 \\ b=6 \\ c=4 \end{cases}, \begin{cases} a=8 \\ b=7 \\ c=3 \end{cases}, \begin{cases} a=8 \\ b=9 \\ c=1 \end{cases} \quad 6 \text{ soluții} \quad (0,5p)$$

$$\text{sau } \begin{cases} a=9 \\ b+c=9 \end{cases}, \text{ adică } \begin{cases} a=9 \\ b=1 \\ c=8 \end{cases}, \begin{cases} a=9 \\ b=2 \\ c=7 \end{cases}, \begin{cases} a=9 \\ b=3 \\ c=6 \end{cases}, \begin{cases} a=9 \\ b=4 \\ c=5 \end{cases}, \begin{cases} a=9 \\ b=5 \\ c=4 \end{cases}, \begin{cases} a=9 \\ b=6 \\ c=3 \end{cases}, \begin{cases} a=9 \\ b=7 \\ c=2 \end{cases}, \begin{cases} a=9 \\ b=8 \\ c=1 \end{cases} \quad 8 \text{ soluții} \quad (0,5p)$$

Rezultă că există 42 de numere cu proprietatea cerută. **(0,25p)**

3. (7p) Pe un cerc sunt scrise la întâmplare numerele de la 1 la 13. Arătați că există trei numere scrise unul după altul a căror sumă este mai mare sau egală cu 23.

Soluție. Notăm cu a, b, c primele trei numere scrise pe cerc după numărul 1, cu m, n, p următoarele numere, apoi cu x, y, z următoarele și cu u, v, w ultimele trei numere. Fie $S_1 = a + b + c$, $S_2 = m + n + p$, $S_3 = x + y + z$, $S_4 = u + v + w$. Rezultă:

$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 90$. Dacă toate sumele S_1, S_2, S_3, S_4 ar fi mai mici sau egale cu 22 atunci suma $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ ar fi mai mică sau egală cu 88, ceea ce este fals. Rezultă că cel puțin o sumă este mai mare sau egală cu 23.

4. (7p) Se consideră numerele naturale $a < b < c$. Pe tablă erau scrise cu roșu rezultatele scăderilor $b - a$, $c - a$, $c - b$ și cu verde rezultatele adunărilor $a + b$, $a + c$, $b + c$. Din greșeală s-au șters trei dintre numere și au rămas 34 și 51 roșii și 55 verde. Aflați numerele a, b, c .

Romanața Ghiță și Ioan Ghiță, Blaj
(P: 887, GMB 2 – 2016)

Soluția 1. Suma și diferența a două numere au aceeași paritate, adică ambele sunt pare sau ambele sunt impare. **(1) (0,25p)**

Fie $x = b - a$, $y = c - b \Rightarrow x + y = b - a + c - b = c - a \Rightarrow c - a = x + y$. **(0,25p)**

Din textul problemei rezultă că două dintre numerele $x, y, x + y$ sunt egale cu 34 și 51. **(2) (0,25p)**
Putem avea:

I. $x, y - nr. \text{ pare} \Rightarrow x + y - nr. \text{ par}$ (*Fals!*, **(2)**) **(0,5p)**

II. $x, y - nr. \text{ impare} \Rightarrow x + y - nr. \text{ par} \Rightarrow x + y = 34$ și $(x = 51 \text{ sau } y = 51)$ (*Fals!*) **(0,5p)**

III. $\left. \begin{matrix} x - \text{par} \\ y - \text{impar} \end{matrix} \right\} \Rightarrow x + y - \text{impar} \Rightarrow \begin{matrix} x = 34 \\ y = 51 \end{matrix} \text{ sau } \begin{matrix} x = 34 \\ x + y = 51 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 34 \\ y = 51 \end{matrix} \text{ sau } \begin{matrix} x = 34 \\ y = 17 \end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} b - a = 34 \\ c - b = 51 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} b - a = 34 \\ c - b = 17 \end{cases}$ **(3) (1p)**

(1), (3) $\Rightarrow b + a - \text{par} \Rightarrow a + c = 55$ sau $b + c = 55$ (0,5p)

Dacă $a + c = 55$ atunci:

(3) $\Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 34 \\ c - b = 51 \\ a + c = 55 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} b - a = 34 \\ c - b = 17 \\ a + c = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 34 \\ c - a = 85 \text{ (fals!)} \\ c + a = 55 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} b - a = 34 \\ c - a = 51 \\ a + c = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 36 \\ c = 53 \end{cases} \text{ sol. (0,5p)}$

Dacă $b + c = 55$ atunci:

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=34 \\ c-b=51 \\ b+c=55 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} b-a=34 \\ c-b=17 \\ b+c=55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=34 \\ b=2 \text{ (fals!)} \\ c=53 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} b-a=34 \\ b=19 \text{ (fals!)} \\ c=36 \end{cases} \quad (0,5p)$$

$$\text{IV. } \begin{cases} x - \text{impar} \\ y - \text{par} \end{cases} \Rightarrow x+y - \text{impar} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} x=51 \\ y=34 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x+y=51 \\ y=34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=51 \\ y=34 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x=17 \\ y=34 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} b-a=51 \\ c-b=34 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} b-a=17 \\ c-b=34 \end{cases} \quad (4) \quad (1p)$$

$$(1), (3) \Rightarrow b+c - \text{par} \Rightarrow a+c=55 \text{ sau } a+b=55 \quad (0,5p)$$

Dacă $a+c=55$ atunci:

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=51 \\ c-b=34 \\ a+c=55 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} b-a=17 \\ c-b=34 \\ a+c=55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=51 \\ c-a=85 \text{ (fals!)} \\ c+a=55 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} b-a=17 \\ c-a=51 \\ a+c=55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=19 \\ c=53 \end{cases} \text{ sol.} \quad (0,5p)$$

Dacă $a+b=55$ atunci:

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=51 \\ c-b=34 \\ b+a=55 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} b-a=17 \\ c-b=34 \\ b+a=55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=53 \\ c=87 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a=19 \\ b=36 \\ c=70 \end{cases} \text{ soluții} \quad (0,5p)$$

$$\text{Răspuns: } \begin{cases} a=2 \\ b=36 \\ c=53 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a=2 \\ b=19 \\ c=53 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a=2 \\ b=53 \\ c=87 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a=19 \\ b=36 \\ c=70 \end{cases} \quad (0,25p)$$

Soluția 2. Suma și diferența a două numere au aceeași paritate, adică ambele sunt pare sau ambele sunt impare. (1) (0,25p)

Fie $x=b-a$, $y=c-b \Rightarrow x+y=b-a+c-b=c-a \Rightarrow c-a=x+y$. (0,25p)

Din textul problemei rezultă că două dintre numerele $x, y, x+y$ sunt egale cu 34 și 51. (0,25p) \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=34 \\ y=51 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x=51 \\ y=34 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x=34 \\ x+y=51 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} y=34 \\ x+y=51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=34 \\ y=51 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x=51 \\ y=34 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x=34 \\ y=17 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} y=34 \\ x=17 \end{cases} \quad (1p)$$

$$\text{I. } \begin{cases} x=34 \\ y=51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=34 \\ y=51 \\ x+y=85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=34 \\ c-b=51 \\ c-a=85 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b-a=34 \\ c-b=51 \\ c-a=85 \\ c+b=55 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} b-a=34 \\ c-b=51 \\ c-a=85 \\ c+a=55 \end{cases} \text{ (fals)} \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=34 \\ b=2 \text{ (fals)} \\ c=53 \end{cases} \quad (1,25p)$$

$$\text{II. } \begin{cases} x=51 \\ y=34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=51 \\ y=34 \\ x+y=85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=51 \\ c-b=34 \\ c-a=85 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b-a=51 \\ c-b=34 \\ c-a=85 \\ b+a=55 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} b-a=51 \\ c-b=34 \\ c-a=85 \\ c+a=55 \end{cases} \text{ (fals)} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=53 \text{ (sol.)} \\ c=87 \end{cases} \quad (1,25p)$$

$$\text{III. } \begin{cases} x=34 \\ y=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=34 \\ y=17 \\ x+y=51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=34 \\ c-b=17 \\ c-a=51 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b-a=34 \\ c-b=17 \\ c-a=51 \\ c+b=55 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} b-a=34 \\ c-b=17 \\ c-a=51 \\ c+a=55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=34 \\ b=19 \text{ (fals)} \\ c=36 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a=2 \\ b=36 \text{ (sol.)} \\ c=53 \end{cases} \quad (1,25p)$$

$$\text{IV. } \begin{cases} x=17 \\ y=34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=17 \\ y=34 \\ x+y=51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=17 \\ c-b=34 \\ c-a=51 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b-a=17 \\ c-b=34 \\ c-a=51 \\ b+a=55 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} b-a=17 \\ c-b=34 \\ c-a=51 \\ c+a=55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=19 \\ b=36 \text{ sau } \\ c=70 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a=2 \\ b=19 \text{ (soluții)} \\ c=53 \end{cases} \quad (1,25p)$$

$$\text{Răspuns: } \begin{cases} a=2 \\ b=36 \\ c=53 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a=2 \\ b=19 \\ c=53 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a=2 \\ b=53 \\ c=87 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a=19 \\ b=36 \\ c=70 \end{cases} \quad (0,25p)$$

Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.