Matematica în Bucovina. Concursul Internaţional „Memorialul David Hrimiuc”
ediţia a XII- a, 30 octombrie– 1 noiembrie 2015

Clasa a VI-a
Barem de corectare şi notare

1. Arătaţi că numărul $a = 15 + 3^{2014}$ se divide cu 24.

Gazeta Matematică Nr.10/2014

Soluţie.

$a = 15 + 3^{2014} \Rightarrow a = 3 \cdot \left(5 + 3^{2013}\right) \Rightarrow a \vdots 3$

$a = 15 + 3^{2014} \Rightarrow a = 15 + 9^{1007} \Rightarrow a = 15 + (8+1)^{1007} \Rightarrow a = 8k - 1 + 8p + 1 \Rightarrow a = 8(k+p) \Rightarrow a \vdots 8$

Cum 24= $3 \cdot 8$, $a \vdots 3$, $a \vdots 8$, $(3,8) = 1 \Rightarrow a \vdots 24$

Barem.

$a = 15 + 3^{2014} \Rightarrow a = 3 \cdot \left(5 + 3^{2013}\right) \Rightarrow a \vdots 3$	3p
$a = 15 + 3^{2014} \Rightarrow a = 15 + 9^{1007} \Rightarrow a = 15 + (8+1)^{1007} \Rightarrow a = 8k - 1 + 8p + 1 \Rightarrow a = 8(k+p) \Rightarrow a \vdots 8$	3p
24= $3 \cdot 8$, $a \vdots 3$, $a \vdots 8$, $(3,8) = 1 \Rightarrow a \vdots 24$	1p

2. a. Să se determine numărul natural n care are exact trei divizori şi suma divizorilor este 307
b. Să se determine numărul natural m care are exact patru divizori şi suma divizorilor este 48

Soluţie.

a. Dacă n are exact trei divizori $\Rightarrow$ n este pătratul unui număr prim iar divizorii săi sunt 1, d, d^2
$\Rightarrow 1+d+d^2 = 307 \Rightarrow d(d+1) = 306 \Rightarrow d = 17$

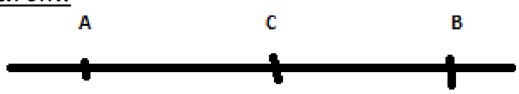
b. Dacă m are exact patru divizori $\Rightarrow$ n este produsul a două numere prime iar divizorii săi sunt 1, a, b, ab, $\Rightarrow$ 1+a+b+ab = 48 , a şi b numere prime $\Rightarrow$ (1+a) + b(1+a) = 48 $\Rightarrow$ (1+a)(1+b) = 48 $\Rightarrow$ a=5 şi b=7

Barem.

a. divizorii lui n sunt 1, d, d^2, d este număr prim	1p
$1+d+d^2 = 307 \Rightarrow d(d+1) = 306$	1p
d =17	1p
b. Divizorii lui m sunt 1, a, b, ab, unde a și b sunt numere prime	1p
1+a+b+ab = 48 $\Rightarrow$ (1+a)(1+b) = 48	1p
a=5 şi b=7	2p

3. Fie punctul C mijlocul segmentului (AB) şi punctul D situat pe dreapta AB astfel încât $\frac{DB}{DA} = \frac{1}{5}$ şi CD = 12 cm. Aflaţi lungimea segmentului (AB).

Barem.



$\frac{DB}{DA} = \frac{1}{5} \Rightarrow DA = 5 \cdot DB \Rightarrow AD > DB$.	1p

Caz I $D \in [AB]$ *si* $AD = 5 \cdot DB \Rightarrow AB = 6 \cdot DB$ *si cum* $AB = 2 \cdot CB \Rightarrow D \in [CB]$ *si* $CB = 3 \cdot DB$	1p
$CB = 3 \cdot DB \Rightarrow CD = 2 \cdot DB \Rightarrow DB = 6 \Rightarrow AB = 36$	2p
Caz II $B \in [AD]$ *si* $AD = AB + BD \Rightarrow 5 \cdot DB = AB + BD \Rightarrow AB = 4 \cdot DB$ *cum* $AB = 2 \cdot CB \Rightarrow BC = 2 \cdot BD \Rightarrow BC + BD = 3 \cdot BD$	2p
$12 = 3 \cdot DB \Rightarrow DB = 4 \Rightarrow AB = 16$	1p

4. Punctele $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2k+1}$, sunt coliniare în această ordine astfel încât segmentele A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3 ,…, $A_{2k}A_{2k+1}$ au lungimi numere naturale consecutive şi A_0A_{2k+1} = 1200mm. Să se afle ce valori poate avea lungimea segmentului A_0A_1

Soluţia

A_0A_{2k+1} = 1200mm $\Rightarrow$ x + x+1 + x+2 +…+ x+2k =1200 $\Rightarrow$

$(2k+1)(x+k)=2^4 \cdot 5^2 \cdot 3 \Rightarrow 2k+1 \in \{1,3,5,15,25,75\} \Rightarrow \ldots \Rightarrow k \in \{2,7,12\}$ şi $x \in \{36,73,238\}$

<u>*Barem*</u>

$A_0A_1 = x$, $A_1A_2 = x+1$, $A_2A_3 = x+2$, …, $A_{2k}A_{2k+1} = x+2k$,	2p
A_0A_{2k+1} = 1200mm. $\Rightarrow$ x + x+1 + x+2 +…+ x+2k =1200.........................	1p
$(2k+1)(x+k)=2^4 \cdot 5^2 \cdot 3$	1p
$2k+1 \in \{1,3,5,15,25,75\} \Rightarrow \ldots \Rightarrow k \in \{2,7,12\}$	1p
$x \in \{36,73,238\}$	2p

Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.