

**Matematica în Bucovina. Concursul internațional de
matematică "Memorialul David Hrimiuc"**
ediția a XIX - a, 10 – 12 noiembrie 2023

Clasa a VIII-a

1. (7p) Arătați că numerele reale $a = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ și $b = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$ sunt naturale și egale.

2. (7p) Fie $x, y, z \in [0, \infty)$ astfel încât $x + y + z = 2023$. Arătați că $\sqrt{2x^2 + 5xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + 5yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + 5zx + 2x^2} \leq 6069$.

Când are loc egalitatea?

3. (7p) Se consideră triunghiul ABC , un punct $M \in (AC)$ și $N \in BC$ astfel încât $MN \perp BC$. Perpendiculara din C pe AN și perpendiculara dusă în B pe BC se intersectează în punctul P , iar dreptele MP și AN se intersectează în Q . Demonstrați că $AP \perp CQ$ dacă și numai dacă $AB \perp AC$.

4. (7p) Binecunoscuta *Hogwarts School of Witchcraft and Wizardry* a hotărât brusc să participe la concursul de matematică de la Gura Humorului, "Memorialul David Hrimiuc". Fiind la prima participare, au decis să-l trimită la acest concurs pe cel mai cunoscut elev al școlii, celebrul Harry Potter.

Profesorul Dumbledore, antrenorul lui Harry, urmează să stabilească un program riguros de pregătire pentru fiecare din cele șapte zile rămase până la concurs. Astfel, tânărul Harry trebuie să studieze zilnic câteva teme din cele trei domenii vizate la concurs: Aritmetică, Algebră și Geometrie.

Ca în orice școală serioasă, trebuie respectate câteva reguli:

1° un elev nu poate avea zi liberă, fără studiu;

2° este interzis studiul tuturor celor trei domenii în aceeași zi.

Un exemplu de program de pregătire pentru Harry este următorul: Sâmbătă - Aritmetică și Algebră; Duminică - Algebră; Luni - Aritmetică și Geometrie; Marți - Geometrie și Algebră; Miercuri - Geometrie și Aritmetică; Joi - Algebră și Geometrie; Vineri - Aritmetică.

Aflați în câte moduri poate alege profesorul Dumbledore programul de pregătire al lui Harry pentru cele șapte zile rămase până la concurs.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

 Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.