.

Matematica în Bucovina. Concursul internaţional de matematică "Memorialul David Hrimiuc"
ediţia a XIX - a, 10 − 12 noiembrie 2023

Clasa a VIII-a - Soluţii şi barem de corectare

1. (7p) Arătaţi că numerele reale $a = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ şi $b = \sqrt{9+4\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\sqrt{5}}$ sunt naturale şi egale.

Gazeta Matematică

Soluţie. Cum $7 \pm 4\sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3})^2$, avem $a = |2+\sqrt{3}| + |2-\sqrt{3}|$. Ţinând cont că $1 < \sqrt{3} < 2$, obţinem $a = 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3} = 4$.

.... **3 puncte**

Cum $9 \pm 4\sqrt{5} = (2 \pm \sqrt{5})^2$, avem $b = |2+\sqrt{5}| - |2-\sqrt{5}|$. Ţinând cont că $2 < \sqrt{5} < 3$, obţinem $b = \left(2+\sqrt{5}\right) - \left(\sqrt{5}-2\right) = 4$.

.... **3 puncte**

În concluzie, avem $a = b = 4 \in \mathbb{N}$.

.... **1 punct**

2. (7p) Fie $x, y, z \in [0, \infty)$ astfel încât $x+y+z = 2023$. Arătaţi că

$$\sqrt{2x^2+5xy+2y^2} + \sqrt{2y^2+5yz+2z^2} + \sqrt{2z^2+5zx+2x^2} \leqslant 6069.$$

Când are loc egalitatea?

Traian Duminică, Suceava

Soluţie. Observăm că $2x^2+5xy+2y^2 = (2x+y)(x+2y)$.

.... **1 punct**

Folosind inegalitatea mediilor ($GM \leqslant AM$), obţinem

$$\sqrt{(2x+y)(x+2y)} \leqslant \frac{(2x+y)+(x+2y)}{2} = \frac{3(x+y)}{2},$$

adică $\sqrt{2x^2+5xy+2y^2} \leqslant \dfrac{3x+3y}{2}$. În mod analog se obţin inegalităţile $\sqrt{2y^2+5yz+2z^2} \leqslant \dfrac{3y+3z}{2}$ şi $\sqrt{2z^2+5zx+2x^2} \leqslant \dfrac{3z+3x}{2}$.

.... **3 puncte**

Adunând membru cu membru ultimele trei inegalităţi, obţinem

$$\sqrt{2x^2+5xy+2y^2}+\sqrt{2y^2+5yz+2z^2}+\sqrt{2z^2+5zx+2x^2} \leqslant \frac{6x+6y+6z}{2} =$$
$$= 3(x+y+z) = 6069.$$

.... **2 puncte**

Deoarece în inegalitatea mediilor avem egalitate dacă şi numai dacă cele două numere sunt egale, deducem că în inegalitatea din enunţ are loc egalitatea dacă şi numai dacă $2x+y = x+2y$, $2y+z = y+2z$ şi $2z+x = z+2x$, adică $x = y = z$. Cum $x + y + z = 2023$, obţinem $x = y = z = \frac{2023}{3}$.

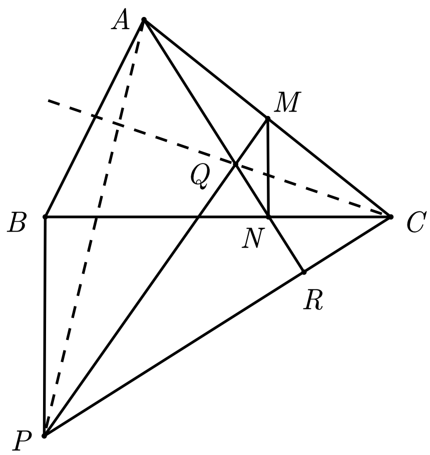
.... **1 punct**

3. (7p) Se consideră triunghiul ABC, un punct $M \in (AC)$ şi $N \in BC$ astfel încât $MN \perp BC$. Perpendiculara din C pe AN şi perpendiculara dusă în B pe BC se intersectează în punctul P, iar dreptele MP şi AN se intersectează în Q. Demonstraţi că $AP \perp CQ$ dacă şi numai dacă $AB \perp AC$.

Concursul "Al.Myller"

Soluţie.

Figura realizată corect .... **1 punct**



Dacă $AP \perp CQ$ atunci Q este ortocentrul triunghiului APC, prin urmare $PM \perp AC$.

.... **1 punct**

Fie $\{R\} = AQ \cap PC$. Rezultă $\Delta CPM \sim \Delta CAR$, de unde $\frac{CP}{CA} = \frac{CM}{CR}$, deci $CM \cdot CA = CP \cdot CR$. Cum $\Delta CRN \sim \Delta CBP$, rezultă $\frac{CR}{CB} = \frac{CN}{CP}$, deci $CN \cdot CB = CP \cdot CR$. Deducem că $CM \cdot CA = CN \cdot CB$, adică $\frac{CM}{CB} = \frac{CN}{CA}$. Rezultă $\Delta CMN \sim \Delta CBA$, deci $\sphericalangle BAC = \sphericalangle MNC = 90^\circ$, adică $AB \perp AC$.

.... **3 puncte**

Reciproc, dacă $AB \perp AC$, adică $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, obţinem $CM \cdot CA = CN \cdot CB$, apoi $CM \cdot CA = CP \cdot CR$, de unde $\Delta CPM \sim \Delta CAR$, deci $PM \perp AC$. Deducem că punctul Q este ortocentrul triunghiului APC, prin urmare $CQ \perp AP$.

.... **2 puncte**

4. (7p) Binecunoscuta *Hogwarts School of Witchcraft and Wizardry* a hotărât brusc să participe la concursul de matematică de la Gura Humorului, ”Memorialul David Hrimiuc”. Fiind la prima participare, au decis să-l trimită la acest concurs pe cel mai cunoscut elev al şcolii, celebrul Harry Potter.

Profesorul Dumbledore, antrenorul lui Harry, urmează să stabilească un program riguros de pregătire pentru fiecare din cele şapte zile rămase până la concurs. Astfel, tânărul Harry trebuie să studieze zilnic câteva teme din cele trei domenii vizate la concurs: Aritmetică, Algebră şi Geometrie.

Ca în orice şcoală serioasă, trebuie respectate câteva reguli:

1° un elev nu poate avea zi liberă, fără studiu;

2° este interzis studiul tuturor celor trei domenii în aceeaşi zi.

Un exemplu de program de pregătire pentru Harry este următorul: Sâmbătă - Aritmetică şi Algebră; Duminică - Algebră; Luni - Aritmetică şi Geometrie; Marţi - Geometrie şi Algebră; Miercuri - Geometrie şi Aritmetică; Joi - Algebră şi Geometrie; Vineri - Aritmetică.

Aflaţi în câte moduri poate alege profesorul Dumbledore programul de pregătire al lui Harry pentru cele şapte zile rămase până la concurs.

Vladimir Cerbu, Câmpulung Moldovenesc

Soluţie.

Vom prezenta programul lui Harry sub forma unui tabel în care pe linii avem cele trei domenii, iar pe coloane zilele rămase până la concurs. Căsuţele tabelului vor fi completate cu 0 sau 1 astfel:

- 0 dacă domeniul respectiv nu este studiat în acea zi
- 1 dacă domeniul respectiv este studiat în acea zi

Exemplul de program prezentat în enunţ generează următorul tabel:

	Sâmbătă	Duminică	Luni	Marţi	Miercuri	Joi	Vineri
Aritmetică	1	0	1	0	1	0	1
Algebră	1	1	0	1	0	1	0
Geometrie	0	0	1	1	1	1	0

.. 2 puncte

Pentru a rezolva problema, trebuie să aflăm numărul modalităţilor de completare a tabelului astfel încât să nu existe coloane cu trei de 0 (condiţia 1° din enunţ) şi nici coloane cu trei de 1 (condiţia 2° din enunţ).

.. 2 puncte

Fiecare coloană poate fi completată independent de celelalte coloane în $2^3 - 2 = 6$ moduri. Cum avem 7 coloane, deducem că tabelul poate fi completat în $6^7 = 279.936$ moduri.

.. 3 puncte