Matematica în Bucovina. Concursul internaţional de matematică "Memorialul David Hrimiuc" ediţia a XIX - a, 10 – 12 noiembrie 2023

Clasa a VII-a - Soluţii şi barem de corectare

1. (7p) Determinaţi toate numerele naturale n pentru care numărul $N = \sqrt{10 - \sqrt{10 - \sqrt{n+10}}}$ este număr natural.

Gazeta Matematică

Soluţie.

Dacă $N \in \mathbb{N}$, atunci $10 - \sqrt{10 - \sqrt{n+10}} = m^2$, unde $m \in \mathbb{N}$.

.... **2 puncte**

Dar $10 - \sqrt{10 - \sqrt{n+10}} \leqslant 10$, adică $m^2 \leqslant 10$, iar de aici obţinem $m \in \{0, 1, 2, 3\}$.

.... **2 puncte**

Dacă $m = 3$, se obţine $\sqrt{n+10} = 9$, adică $n = 71$. Cazurile în care $m \in \{0, 1, 2\}$ nu conduc la nicio soluţie. În concluzie, $n = 71$.

.... **3 puncte**

2. (7p) Determinaţi numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ ştiind că suma lor este egală cu 2023 şi $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_3| = \dots = |x_{2022} - x_{2023}| = |x_{2023} - x_1|$.

***

Soluţie.

Fie $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_3| = \dots = |x_{2022} - x_{2023}| = |x_{2023} - x_1| = a$. Atunci

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= \pm a \\ x_2 - x_3 &= \pm a \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_{2022} - x_{2023} &= \pm a \\ x_{2023} - x_1 &= \pm a \end{aligned} \qquad (*)$$

.... **2 puncte**

Adunând membru cu membru aceste egalităţi obţinem

$$0 = \pm a \pm a \pm \dots \pm a\ , \quad \text{de unde} \quad 0 = \mathrm{a} \cdot \big(\pm 1 \pm 1 \pm \dots \pm 1\big).$$

În paranteză avem 2023 de termeni egali cu ± 1. Cum o sumă cu un număr impar de termeni impari este impară, deducem că $\big(\pm 1 \pm 1 \pm \dots \pm 1\big) \neq 0$, prin urmare $a = 0$.

.... **3 puncte**

Din relaţiile $(*)$ deducem că $x_1 = x_2 = \dots = x_{2022} = x_{2023}$ şi cum $x_1 + x_2 + \dots + x_{2022} + x_{2023} = 2023$, obţinem $x_1 = x_2 = \dots x_{2023} = 1$.

.... **2 puncte**

3. a) (3p) Fie $[AB]$ un segment. Determinaţi mulţimea punctelor M din plan cu proprietatea $MA < MB$.

b) (4p) Fie $ABCD$ un dreptunghi şi $\{O\} = AC \cap BD$. Demonstraţi că mulţimea punctelor M din plan cu proprietatea

$$MO < \min\{MA, MB, MC, MD\}$$

este interiorul unui paralelogram cu diagonalele perpendiculare.

Mircea Popescu, Slatina

Soluţie.

a) Vom arăta că mulţimea căutată este semiplanul deschis determinat de mediatoarea d a segmentului $[AB]$ şi punctul A, notat $(dA$.

.. 1 punct

Cazul $M \in AB$ este evident şi de aceea vom presupune că $M \notin AB$.

Dacă $M \in d$, atunci $[MA] \equiv [MB]$.

Dacă $M \in (dA$ atunci, notând $\{N\} = d \cap MB$, obţinem:

$$MA < MN + NA = MN + NB = MB.$$

Analog, dacă $M \in (dB$ avem $MA > MB$.

.. 2 puncte

b) Intersecţiile mediatoarelor segmentelor (OA), (OB), (OC) şi (OD) sunt vârfurile unui paralelogram $\mathcal{P}$ (laturile opuse sunt paralele).

.. 1 punct

Notăm cu d_A, d_B mediatoarele segmentelor (OA), respectiv (OB) şi cu T punctul lor de intersecţie. Deoarece $(TA) \equiv (TO) \equiv (TB)$, rezultă că punctul T se află pe mediatoarea laturii $[AB]$ a dreptunghiului. Ca urmare, vârfurile paralelogramului $\mathcal{P}$ se află pe mediatoarele laturilor dreptunghiului, care sunt axe de simetrie pentru dreptunghi. Rezultă că paralelogramul $\mathcal{P}$ are diagonalele perpendiculare (adică este un romb).

.. 2 puncte

Notăm cu S_A semiplanul deschis determinat de dreapta d_A şi punctul O, aceeaşi semnificaţie având S_B, S_C, S_D. În baza punctului a) se obţine că mulţimea punctelor M din plan cu proprietatea

$$MO < \min\{MA, MB, MC, MD\}$$

este $S_A \cap S_B \cap S_C \cap S_D = \mathrm{Int}(\mathcal{P})$.

.. 1 punct

4. (7p) Fie M mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ascuţitunghic ABC şi punctele $E \in (AC)$, $F \in (AB)$ astfel încât triunghiul MEF să fie isoscel cu $[ME] \equiv [MF]$. Perpendicularele în E şi F pe AC, respectiv AB, se intersectează în D. Arătaţi că $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ACD}$.

Mircea Fianu, Bucureşti

Soluţie.

Fie P şi Q mijloacele segmentelor $[BD]$, respectiv $[CD]$. Rezultă că patrulaterul $DPMQ$ este paralelogram.

.... **2 puncte**

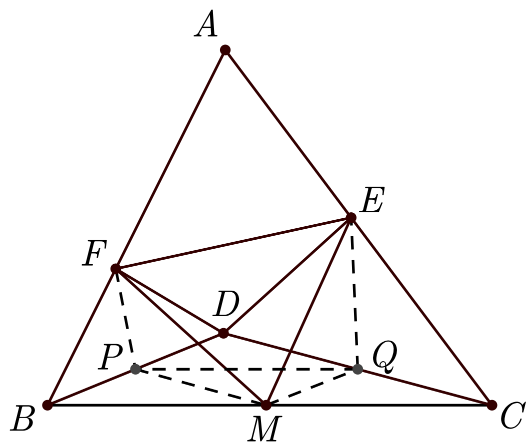
Cum $[FP]$ este mediană în triunghiul dreptunghic FBD, rezultă că $[FP] \equiv [DP] \equiv [MQ]$. Analog se arată că $[EQ] \equiv [MP]$. Ca urmare, $\triangle FPM \equiv \triangle MQE$ (LLL), de unde $\widehat{FPM} \equiv \widehat{EQM}$.

.... **2 puncte**

Dar $\widehat{DPM} \equiv \widehat{DQM}$ şi $\begin{cases} m(\widehat{FPM}) = m(\widehat{FPD}) + m(\widehat{DPM}) \\ m(\widehat{EQM}) = m(\widehat{EQD}) + m(\widehat{DQM}) \end{cases}$, deci $\widehat{FPD} \equiv \widehat{EQD}$.

.... **1 punct**

Aplicând teorema unghiului exterior în triunghiurile isoscele EQC şi FBP, rezultă $\begin{cases} m(\widehat{FPD}) = m(\widehat{BFP}) + m(\widehat{FBP}) = 2m(\widehat{FBP}) \\ m(\widehat{EQD}) = m(\widehat{CEQ}) + m(\widehat{ECQ}) = 2m(\widehat{ECQ}) \end{cases}$, deci $m(\widehat{FBP}) = m(\widehat{ECQ})$, sau, altfel scris, $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ACD}$.



.... **2 puncte**