***Matematica în Bucovina*. Concursul Internațional de matematică „Memorialul *David Hrimiuc*” ediția a XIX - a, 10 – 12 noiembrie 2023**

Clasa a VI-a

Soluții și barem de corectare

1. (7p) Fie mulțimea $A=\{1,2,3,4,......,2023\}$ și trei submulțimi ale mulțimii A, nevide și disjuncte B,C,D, fiecare cu cel puțin trei elemente, a căror reuniune este mulțimea A astfel încât oricare element al mulțimii B adunat cu oricare element al mulțimii C să aibă suma un număr natural divizibil cu 3, și oricare două elemente ale mulțimii D sa aibă suma divizibilă cu 3.

a) Calculați suma elementelor mulțimii D

b) Arătați că mai există o mulțime (B sau C) cu suma elementelor divizibilă cu 3

Prof Ispășoiu Dorel

a) Elementele celor trei submulțimi pot fi de forma 3k, 3k+1, 3k+2..............................1p

Mulțimea D nu poate avea elemente de forma 3k+1 sau 3k+2 deoarece, având cel puțin trei elemente, vor exista două a căror sumă nu va fi divizibilă cu 3 ....2p

Mulțimea D va conține toate elementele de forma 3k. Suma oricăror două numere din această mulțime ar fi de forma 3p, sumă divizibilă cu 3. ....2p

$D=\{3,6,9,.....2022\}$ cu suma elementelor egală cu 682425..1p

b) Deducem că una din mulțimile B sau C conține toate elementele de forma 3k + 1 iar cealaltă va conține elemente de forma 3k+2 ....1p

Fie B mulțimea ce conține elementele de forma 3k+1. Suma elementelor mulțimii va fi 1+4+7+…+2023=683100, sumă divizibilă cu 3

2. a) (3p) Arătați că numărul $a=17+17^2+17^3+\cdots+17^{2024}$ se divide cu 306.

b) (4p) Arătați că același număr a se divide cu 87

Prof. Creangă Genoveva

a) $306=17\cdot 18$, numere consecutive (prime între ele). 1p

$a=17(1+17)+17^3(1+17)+?+17^{2023}(1+17)=17\cdot 18(1+17^2+17^4....+17^{2023})$ 1p

$a\,\vdots\,17\cdot 18\Rightarrow a\,\vdots\,306$ 1p

$b)$ $17+17^2+17^3+17^4=17(1+17^2)+17^2(1+17^2)=17(1+17)(1+17^2)=17\cdot 18\cdot 290$

$=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 17\cdot 29=87\cdot 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 17\,\vdots\,87$..$2p$

Fiind 2024 termeni, îi putem grupa câte patru...1p

Obținem $a=17\cdot 87k+17^5\cdot 87k+..........+17^{2001}\cdot 87k=87kp\,\vdots\,87$.....................................$1p$

3. Pe dreapta *d* se consideră în această ordine punctele $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{100}$ astfel încât $A_0A_1 = 1\ cm, A_1A_2 = 4\ cm, A_2A_3 = 7\ cm, \dots$. Să se afle:

a. **(2p)** A_0A_{100};
b. **(5p)** Fie *M* mijlocul segmentului A_0A_{100}. Să se afle $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $M \in [A_nA_{n+1}]$.

Prof. Creangă Genoveva

a) Din $A_0A_{100} = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{99}A_{100}$,
obținem $A_0A_{100} = 3 \cdot 0 + 1 + 3 \cdot 1 + 1 + \cdots + 3 \cdot 99 + 1$ 1p
$A_0A_{100} = 3 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} + 100$, deci $A_0A_{100} = 14950\ cm$. 1p

b) Din *M* mijlocul segmentului A_0A_{100} avem $A_0M = MA_{100} = 7475\ cm$ 1p
Cum $M \in [A_nA_{n+1}]$, deducem $A_0A_n \le A_0M \le A_0A_{n+1}$. 1p
Așadar $3 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + n \le 7475 \le 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$. 2p
$n(3n-1) \le 14950 \le (n+1)(3n+2)$, relație adevărată pentru $n = 70$. 1p

4. **(7p)** Considerăm unghiurile $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOB$,cu interioarele disjuncte, astfel încât împreună formează unghiul alungit $\sphericalangle AOB$. Fie (OE și (OF bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOC$, respectiv $\sphericalangle DOB$

a) (3p)Știind că $\sphericalangle EOF = 120^0$ determinați măsura unghiului $\sphericalangle COD$.
b) (4p)Dacă, în plus, ducem OM perpendiculară pe OC astfel încât M și C să fie de aceeași parte a dreptei AB și $\sphericalangle FOM = 10^0$, aflați $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle DOB$

GM Nr. 9/2022

a) $\sphericalangle EOF = 120^0 \Rightarrow$
$\sphericalangle EOA + \sphericalangle BOF = 180^0 - 120 = 60^0$..1p
$\sphericalangle AOC + \sphericalangle DOB = 2(\sphericalangle EOA + \sphericalangle BOF) = 120$ 1p
$\Rightarrow \sphericalangle COD = 180^0 - 120 = 60^0$...1p

b) Avem de studiat două cazuri:
1) Punctul M este situat în interiorul unghiului $\sphericalangle BOF$
$\sphericalangle DOM = \sphericalangle COM - \sphericalangle COD = 30^0 \Rightarrow \sphericalangle DOF = 30 - 10^0 = 20^0$............................1p
$\sphericalangle AOC = 180^0 - 60^0 - 40^0 = 80^0$..1p
2) Punctul M este situat în interiorul unghiului $\sphericalangle DOF$
$\sphericalangle DOM = \sphericalangle COM - \sphericalangle COD = 30^0 \Rightarrow \sphericalangle DOF = 30 + 10^0 = 40^0$............................1p
$\sphericalangle AOC = 180^0 - 60^0 - 80^0 = 40^0$..1p

Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.